Määr: $n \times n$-matriisia A kutsutaan kääntyväksi l. ei-singulaariseksi, jos on olemassa $n \times n$-matriisi C joka toteuttaa

$$(*) \quad CA = I_{n \times n} \quad \text{ja} \quad AC \triangleq I_{n \times n}$$

Kun C toteuttaa yhtälöt $(*)$, kirjoitetaan $C = A^{-1}$ ja kutsutaan C:tä A:n käänteismatriisiksi.

Lemma: Kääntyvän matriisin A käänteismatriisi on yksikäsitt.

Perustelu: Oletetaanpa että olisi käänteismatriisit B ja C.

TS:

$$\begin{cases} BA = AB = I \\ CA = AC = I \end{cases}$$

Nyt

$$B = B \cdot I = B(AC) = (BA)C$$

$$= I \cdot C = C$$

Pää ja häntä sanoo että $B = C$. $\blacksquare$

<u>Lause:</u> Jos A on kääntyvä $n\times n$-matriisi, niin jokaisella $\bar{b} \in \mathbb{C}^n$ yhtälöryhmällä

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

on yksikäsitt. ratkaisu $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$.

<u>Perustelu:</u> On selvää että $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$ on <u>eräs</u> ratkaisu.

Oletetaanpa että olisi toinen ratkaisu $\bar{u}$: $A\bar{u} = \bar{b}$.

$$\begin{cases} A\bar{x} = \bar{b} \\ A\bar{u} = \bar{b} \end{cases} \Rightarrow A\bar{x} = A\bar{u}$$

Nyt

$$\bar{u} = I\bar{u} = A^{-1}A\bar{u} = A^{-1}A\bar{x}$$

$$= I\bar{x} = \bar{x}$$

Pää ja häntä sanoo $\bar{u} = \bar{x}$ $\blacksquare$
eli ratkaisu yksikäsitt.

<u>Lause:</u> (i) $n\times n$-matriisi A on kääntyvä jos ja vain jos A on riviekvivalentti $n\times n$-yksikkömatriisin kanssa:

$$A \sim \ldots\ldots \sim I$$

(iii) Ne alkeisrivioperaatiot, jotka redusoivat A:n I:ksi redusoivat I:n A^{-1}:ksi.

<u>Perustelu</u>: Jokainen Gaussin alkeisrivioperaatio voidaan toteuttaa laajennetun matriisin kertomisella vasemmalta eräille vastaaville "alkeismatriiseille".

Ts. gaussitusaskeleet voidaan esittää

$$A \sim E_1 A \sim E_2(E_1 A) \sim E_3(E_2(E_1 A))$$

$$\sim \cdots \sim E_{p-1}(E_{p-2}(\cdots (E_1(A))))$$

$$\sim E_p(E_{p-1}(\cdots E_1(A)))) = I$$

$$\underbrace{(E_p E_{p-1} \cdots E_1)}_{=:\, A^{-1}} \cdot A = I$$

oletus siitä että redusoitu porrasmuoto olisi yksikkömatriisi.

Tämä on yhteys Gaussin eliminaation ja käänteismatriisin välillä. $\square$

Laskuesimerkki:

Käännä matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot 4 -$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \cdot 3 +$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right] :2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right].$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right].$$

Kääntyvän matriisin lause

(Layn kirjassa s. 129.)

Lause: Olkoon A $n \times n$-matriisi. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja:

(a) A on kääntyvä

(b) A on rivi-ekvivalentti $n \times n$-identiteettimatriisin kanssa.

(c) A:lla on tasan n kpl tukialkion sisältäviä pystyrivejä.

(d) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on ainoastaan triviaaliratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$ (ts. $N(A) = \{\bar{0}\}$)

(e) A:n pystyvektorit muodostavat lineaarisesti vapaan joukon.

(f) Lin. kuvaus $x \mapsto A\bar{x}$ on injektiivinen

(g) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on vähintään yksi ratkaisu jokaisella $\bar{b}$.

(h) A:n pystyvektoreiden virittämä aliavaruus on koko n-ulotteinen pystyvektoreitten aliavaruus $\mathbb{C}^n$.

(i) lin. kuvaus $\bar{x} \mapsto A\bar{x}$ on surjektiivinen

(j) on olemassa $n \times n$ - matriisi C siten että $CA = I$

(k) on olemassa $n \times n$ - matriisi D siten että $AD = I$

(l) Transpoosi A^T on kääntyvä.

Perustelu: (a) $\Leftrightarrow$ (b) seuraa edel. viikon determinanttiopista.

Selvästi (a) $\Rightarrow$ (j) (ja myös (k))

(d) $\Rightarrow$ (c): Gaussittamalla. Jos oli epätriviaali ratkaisu $\bar{x} \neq 0$ yhtälölle $A\bar{x} = \bar{0}$ tulisi olla vähintään yksi vapaa muuttuja $\Rightarrow$ jollain pystyvektorilla ei olisi tukialkiota

$(j) \Rightarrow (d)$: Jos olisi jokin $\bar{x} \neq \bar{0}$ siten että $A\bar{x} = \bar{0}$ niin tällöin.

$$\bar{0} = C \cdot \underbrace{A\bar{x}}_{=\bar{0}} = \underbrace{(CA)}_{(j) \Rightarrow CA = I} \cdot \bar{x} = \bar{x}$$

Nyt tiedetään seuraava ketju implikaatioita

$$(a) \Rightarrow (j) \Rightarrow (d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$$

ja siten nämä kaikki ovat ekvivalentteja.

Lähdetään liikkeelle ehdosta (k)

$(k) \Rightarrow (g)$: Olkoon $\bar{b}$ mielivaltainen.

Tällöin

$$\bar{b} = I \cdot \bar{b} = \underbrace{(AD)}_{AD = I \text{ kun (k) pätee}} \bar{b} = A \cdot \overbrace{(D\bar{b})}^{\bar{x}}$$

Siis jos $\bar{x} = D\bar{b}$ niin tällöin $A\bar{x} = \bar{b}$.

$(g) \Rightarrow (a)$: Jos (g) pätee, niin laajennetun matriisin $\tilde{A} = [A \mid \bar{b}]$ redusoidun porrasmuodon yksikään vaakarivi ei ole muotoa

$$[0 \text{ —— } 0 \mid b']$$

Ts. jokaisella pystyrivillä on tukialkio. Siis A on rivi-ekvivalentti

identiteettimatriisin kanssa $\Rightarrow$
A kääntyvä ts. (a) toteutuu.
Siis löydettiin implikaatioketju

$$(a) \Rightarrow (k) \Rightarrow (g) \Rightarrow (a)$$

Siis nämä ovat kaikki ekvivalentteja.
Tämä todisti väitteet. ∎

Kotiläksy: Layn kirjan sivu 129.

Vektoriavaruuksista ja niiden aliavaruuksista

(osin kertausta)

<u>Määr</u>: Vektoriavaruuden V <u>aliavaruus</u> W on sellainen V:n osajoukko ($W \subset V$) joka on suljettu yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen alla:

(i) $\bar{u}, \bar{v} \in W \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in W$

(ii) $c \in \mathbb{C},\ \bar{u} \in W \Rightarrow c\bar{u} \in W$.

Esim: $N(A)$ on aliavaruus.

Perustelu:

(i) $\bar{u}, \bar{v} \in N(A) \Rightarrow A\bar{u} = \bar{0}$, $A\bar{v} = \bar{0}$

Siis $A(\bar{u}+\bar{v}) = \underbrace{A\bar{u}}_{=\bar{0}} + \underbrace{A\bar{v}}_{=\bar{0}} = \bar{0}$

$\Rightarrow \bar{u}+\bar{v} \in N(A)$

(ii) $\alpha \in \mathbb{C}$, $\bar{u} \in N(A) \Rightarrow A\bar{u} = \bar{0}$.

$A(\alpha\bar{u}) = \alpha \cdot \underbrace{A\bar{u}}_{=\bar{0}} = \alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$

$\Rightarrow \alpha\bar{u} \in N(A)$ ∎.

Esim: Matriisin $A_{m\times n}$ pystyvektoreiden virittämä avaruus

($A = [\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n]$)

$\operatorname{span}\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} =: \operatorname{Range} A$

on $\mathbb{C}^m$:n aliavaruus:

Perustelu:

70

$\bar{u} = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \dots + c_n\bar{a}_n$

$\bar{v} = d_1\bar{a}_1 + d_2\bar{a}_2 + \dots + d_n\bar{a}_n$

$\Rightarrow \bar{u}+\bar{v} = (c_1+d_1)\bar{a}_1 + (c_2+d_2)\bar{a}_2 + \dots (c_n+d_n)\bar{a}_n$ j.n.e. ∎

Muista, että vektoriavaruuden V kanta on sellainen joukko V:n vektoreita $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ jotka toteuttavat

(i) $\operatorname{span}\{\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_k\} = V$

(ii) joukko $\{\bar{v}_1, \ldots \bar{v}_k\}$ on lin. vapaa.

Lause: Jokaisessa annetun vektoriavaruuden kannassa on yhtä monta vektoria. (Perustelu ohitetaan)

Määr: Vektoriavaruuden V dimensio on sen mielivaltaisen kannan vektoreiden lukumäärä. Merkitään $\dim V$.

Määr: $\mathbb{C}^n$:n luonnolliset kantavektorit (pystyvektoreina)

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad \bar{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Koordinaattijärjestelmät

Vektoriavaruus $\bar{V}$, $\dim \bar{V} = n$,
kanta $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$.

Kullakin vektorilla $\bar{x} \in \bar{V}$ on esitys

$$\bar{x} = x_1 \bar{v}_1 + x_2 \bar{v}_2 + \dots + x_n \bar{v}_n$$

Lukuja $x_1, x_2, \dots x_n$ kutsutaan vektorin $\bar{x}$ koordinaateiksi kannassa $[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n]$.

Tällöin $\bar{x}$ voidaan esittää pystyvektorina

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Vektoriavaruudessa $\bar{V}$ olevan lineaarikuvauksen voi esittää matriisina joka kertoo näitä pystyvektoreita.

Eri kantoja vastaavat eri koordinaattijärjestelmät.