Perustelu: 26.9.2007

T injektiivinen: Jos olisi $\bar{u}, \bar{v} \in N(T)$, $\bar{u} \neq \bar{v}$ ....
$T(\bar{u}) = T(\bar{v}) = \bar{0}$. Ristiriita.

$N(T) = \{\bar{0}\}$:

$$\bar{0} = T(\bar{u}) - T(\bar{v}) = T(\bar{u} - \bar{v})$$
$$\Rightarrow \bar{u} - \bar{v} \in N(T) = \{\bar{0}\}$$
$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{v}. \qquad \blacksquare$$

Lineaarikuvauksen esittäminen matriisin avulla

Esim: Lin. kuvaus $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ toteuttaa

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ja

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Efri T:lle matrix!

$$\mathbb{C}^2 \ni \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

då har

$$T(\bar{x}) = T\left(x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= x_1 T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{=:A.} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Nu: $T(\bar{x}) = A\bar{x}$.

Sanotaan että "matriisi A esittää lineaarikuvauksen kannassa $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$".

<u>Lause:</u> Jokainen lin. kuvaus $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ voidaan esittää täsmälleen yhdenkäsitteisen $m \times n$-matriisin avulla.

(<u>Perustelu</u>: ilmeinen)

<u>Huom:</u> Erityisesti nähdään miksi matriisi-vektoritulo määritellään kuten määritellään.

<u>Matriisien laskutoimitukset</u>

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\underset{m\times n}{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Määrit:

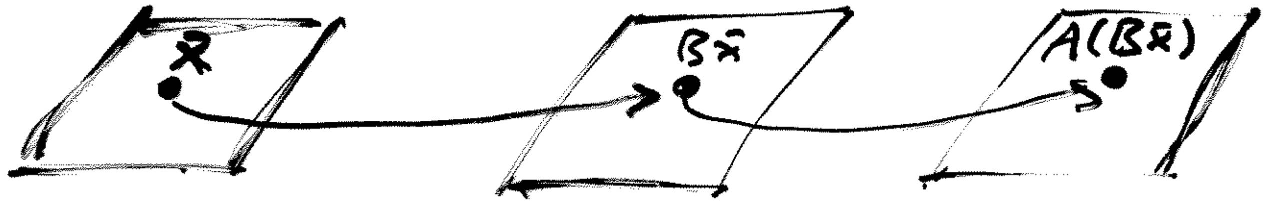
$$\underbrace{A+B}_{m\times n} := \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & \\ & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Summa on elementeittäin kuten vektoreille.

$$cA := \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ ca_{m1} & \cdots & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}.$$

$m\times n$ -matriisien joukko muodostaa näillä laskutoimituksille vektoriavaruuden.

$$\mathbb{C}^p \xrightarrow{B} \mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^m$$



B A

$n \times p$ $m \times n$

Voidaanko toteuttaa kuvaus

$$\bar{x} \longmapsto A(B\bar{x})$$

yhdellä ainoalla matriisilla?
Yhdistetty kuvaus on lineaarinen
$\Rightarrow$ sitä esittää jokin matriisi
C. Voidaan toteuttaa!

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{C}^p: \quad C\bar{x} = A(B\bar{x})$$

Matriisi-vektoritulon perusteella

$$B\bar{x} = x_1 \bar{b}_1 + x_2 \bar{b}_2 + \dots + x_p \bar{b}_p$$

jos $B = [\bar{b}_1 \ \bar{b}_2 \ \cdots \ \bar{b}_p]$

ja

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}.$$

Kertomalla A:lla:

$$A(B\bar{x}) = A(x_1\bar{b}_1 + x_2\bar{b}_2 + \dots + x_p\bar{b}_p)$$

lineaarisuus

$$= x_1 \underbrace{A\bar{b}_1}_{\text{vektori } \mathbb{C}^m\text{:ssä}} + x_2 A\bar{b}_2 + \dots + x_p A\bar{b}_p$$

$$= \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} A\bar{b}_1 & A\bar{b}_2 & \cdots & A\bar{b}_p \end{bmatrix}}_{m \times p}}_{=:C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}}_{=\bar{x}}$$

$$= C\bar{x}$$

Tällä tavalla määritellään matriisien välinen tulo siten että se vastaa kuvausten yhdistämistä.

<u>Huom!</u> Matriisit $\underset{m \times n}{A}$ ja $\underset{p \times q}{B}$ voidaan kertoa keskenään <u>vain</u> jos $n = p$.

$$\underset{m \times n}{A} \quad \underset{p \times q}{B}$$

sama

Esim:

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \underset{3\times 3}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times 3}{A}\ \underset{3\times 3}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 7 + 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 6 + 3\cdot 6 & * \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 7 + 6\cdot 4 & 4\cdot 2 + 5\cdot 6 + 6\cdot 11 & * \end{bmatrix} = ?$$

Matriisitulon laskusäännöt

(i) $$A(BC) = (AB)C$$

Ajattele matriisitulea funktioiden kompositiona

$$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$$

(ii) $$A(B+C) = AB + AC$$

Perustelu: $\forall \bar{x}$:

$$A(B+C)\bar{x} = A(B\bar{x} + C\bar{x})$$

$$\overset{\text{lineaarinen}}{=} A(B\bar{x}) + A(C\bar{x})$$

$$= (AB)\bar{x} + (AC)\bar{x} = (AB+AC)\bar{x}$$

Joten $A(B+C) = AB + AC$.

(iii) $(B+C)A = BA + CA$.

(iv) $r \in \mathbb{C}$

$$r(AB) = (rA)B$$
$$= A(rB)$$

"skalaarin siirtosääntö"

<u>Huom:</u> Laskusäännöissä (i) – (iv) matriisien A, B ja C keskinäinen järjestys säilyy.

(v) $$IA = A = AI$$

$$\underset{n\times n}{I} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tämä on $n\times n$ -identiteettimatriisi.

<u>Varoitus:</u>

(i) $$AB \neq BA$$

jopa silloin kun molemmat tulot ovat dimensioiden puolesta OK.

Esim:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB = \begin{bmatrix} 14 & * \\ * & * \end{bmatrix} \\ \\ BA = \begin{bmatrix} 10 & * \\ * & * \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow AB \neq BA$$

Kun $AB = BA$, niin sanotaan että A ja B kommutoivat.

(ii) Sievennyssääntö ei aina toimi

$$AB = AC$$

$$\not\Rightarrow \quad B = C$$

Jos A on uk. kääntyvä matriisi, niin silloin sievennys toimii.

(ii) $AB = \mathbf{0}$ (nollamatriisi, jonka kaikki elementit nollia) on mahdollista vaikka sekä $A \neq 0$ että $B \neq 0$.

Matriiseilla on "aitoja nollan tekijöitä".

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \qquad B = A$$

$$AB = A \cdot A = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

|| Siis matriisien tapauksessa yhtälöllä $A^2 = 0$ on nollasta poikkeava ratkaisuja.

Matriisien potenssit

$$A^k = \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{k \text{ kpl}}$$

Hyvin määritelty vain jos A on $n \times n$ -matriisi jollain $n \in \mathbb{N}$: ts. neliömatriisi. !!

Sovitaan että $\underset{n\times n}{A}^0 = \underset{n\times n}{I}$.

Matriisin transpoosi

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A:n transpoosi on

$$\underset{n\times m}{A^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{1n} & & & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriisin konjugaatti

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \overline{a_{12}} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \bar{a}_{m1} & \cdots & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriisin hermitointi eli adjungointi

Hermite

$$A^H = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$$

Joissain kirjoissa $A^H = A^*$.

Transponoinnin laskulait

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(rA)^T = r \cdot A^T \quad r \in \mathbb{C}$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

Tämä laskusääntö (iv) esiintyy usein nimellä "dressing - undressing principle".

$B \simeq$ laitan sukat jalkaan

$A \simeq$ laitan kengät jalkaan

$*^T \simeq$ riisun.

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Käänteismatriisi

Olkoon lineaarinen yhtälöryhmä

$$(*) \quad \underset{n\times n}{A}\,\bar{x} = \bar{b}.$$

Voitaisiinko ratkaista niin, että keksittäisiin ovela matriisi C s.e. $\underset{n\times n}{C}\,\underset{n\times n}{A} = \underset{n\times n}{I}$

Tällöin kertomalla yhtälön (*) molemmat puolet C:llä saadaan

$$\bar{x} = \underset{n\times n}{I}\,\bar{x} = C\cdot A\bar{x} = C\bar{b}$$

Silloin kun tällainen matriisi C on olemassa, kutsutaan matriisia A <u>kääntyväksi</u> ja matriisia C A:n käänteismatriisiksi.