Perustelu:

25.9.2007

Olkoon $\bar{p}, \bar{v}_h$ s.e. $A\bar{p} = \bar{b}$ ja $A\bar{v}_h = 0$

$$A(\bar{p} + \bar{v}_h) = \underbrace{A\bar{p}}_{=\bar{b}} + \underbrace{A\bar{v}_h}_{=0}$$

$$= \bar{b}.$$

TS: $\bar{p} + \bar{v}_h$ toteuttaa epä-homog. yht. ryhmän.

Toinen suunta: Jos $\bar{y}$ on jokin ratkaisu $A\bar{y} = \bar{b}$, niin määrit.

$$\bar{v}_h = \bar{y} - \bar{p}$$

Tällöin

$$A\bar{v}_h = A(\bar{y} - \bar{p}) = \underbrace{A\bar{y}}_{\bar{b}} - \underbrace{A\bar{p}}_{\bar{b}}$$

$$= 0 \Rightarrow \bar{v}_h \in N(A)$$

ja selvästi
$$\bar{y} = \bar{p} + \bar{v}_h . \blacksquare$$

Määr: Joukkoa $\mathcal{N}(A)$ kutsutaan matriisin A nolla-avaruudeksi l. ytimeksi (engl. null space, kernel).

Nolla-avaruudella on aina tiettyjä ominaisuuksia:

1. $\mathcal{N}(A) \neq \{\ \}$ koska ainakin $\bar{0} \in \mathcal{N}(A)$.

2. Jos A on $m \times n$-matriisi, niin $\mathcal{N}(A)$

(2c)

on $\mathbb{C}^n$ (n-komponenttisten pystyvektoreiden muodostaman vektoriavaruuden) <u>vektorialiavaruus</u>:

Siis $\mathcal{N}(A) \subset \mathbb{C}^n$
ja lisäksi

(i) $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{N}(A)$
niin ~~tällöin~~
$$\bar{u} + \bar{v} \in \mathcal{N}(A);$$ ja

(ii) $c \in \mathbb{C}$ ja $\bar{u} \in \mathcal{N}(A)$
niin $c\bar{u} \in \mathcal{N}(A)$.

<u>Selvästi</u>: (i) & (ii)
voidaan esittää
lyhyemmin:
$$\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{N}(A)$$
$$\Rightarrow \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in \mathcal{N}(A).$$

3d

Lineaarinen riippumattomuus

Määr: vektorijoukko

$$V := \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_p\}$$

on lineaarisesti vapaa e. lin. riippumaton, jos vektoriyhtälöllä

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \ldots + c_p\bar{v}_p = \bar{0}$$

on olemassa vain triviaali ratkaisu

$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_p = 0.$$

Jos V ei ole lin. vapaa, niin tällöin sitä katsotaan lineaarisesti riippuvaksi.

Huom: $\bar{V}$ on lin. riippuva jos ja vain jos on olemassa kertoimet $c_1, c_2, \ldots, c_p$ siten että

$$c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + \cdots + c_p \bar{v}_p = \bar{0}$$

ja lisäksi vähintään yksi kertoimista c_k, $k = 1, \ldots, p$ toteuttaa $c_k \neq 0$.

Esim: $\mathbb{R}^2$:ssa:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ovatko lin. vapaita?

S0

$$\bar{0} = c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$. Lin. vapaita.

Esim: $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ kuten edellä, $\bar{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Onko $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ lin. vapaa?

$$\bar{0} = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 + c_3 \\ c_1 + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

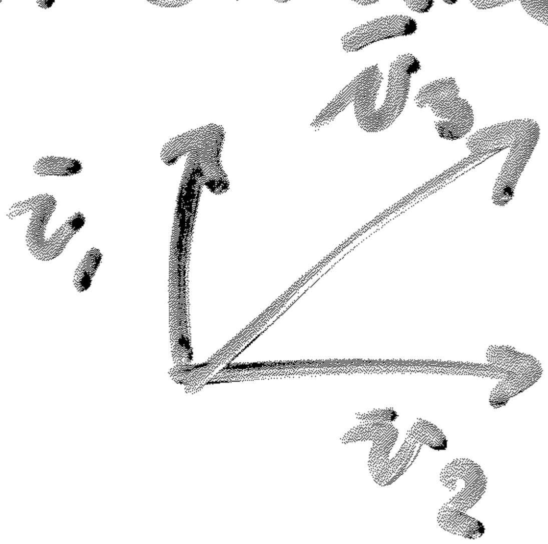
Siis

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

TS $c_1 = c_2 = -c_3$, jossa $c_3 \in \mathbb{R}$ mielivaltainen.

60

Siis vektorijoukko on lin. sidottu



Huom:

Annetuilla vektoreilla $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_p\}$ vektoriyhtälö

$$\bar{0} = c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + \dots + c_p \bar{v}_p$$

on sama kuin

$$A\bar{c} = \bar{0}$$

jossa

$$A = [\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \dots \bar{v}_p]$$

ja

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}.$$

Johtopäätös: lin. vapautta tutkitaan "gaussittamalla".

<u>Lause</u>: Jos vektorijoukko $\bar{V} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_p\}$ on lin. riippuva, niin tällöin jokin vektoreista v_k, $k=1, \dots, p$, voidaan esittää lineaarikombinaationa muista.

<u>Perustelu</u>: Koska $\bar{V}$ on lin. <u>r-va</u>, niin on olemassa vakiot $c_1, c_2, \dots c_p$

siten että

(i) jokin $c_k \neq 0$

(ii) $c_2 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + \dots + c_p \bar{v}_p = \bar{0}$.

Tarvittaessa uudelleen järjestämällä joukko V, voidaan olettaa (yleisyyttä menettämättä) että $c_1 \neq 0$.

Tällöin (ii) on ekvivalentti:

$$\bar{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\bar{v}_2 - \frac{c_3}{c_1}\bar{v}_3 - \dots - \frac{c_p}{c_1}\bar{v}_p$$

Tämä todistaa väitteen. ∎

Näin löydetään algoritmisesti lin. riippuvasta vektorijoukosta V lin. vapaa osajoukko $V' \subset V$.

Poistetaan "ylimääräisiä" vektoreita yksi kerrallaan.

<u>Määr:</u> Vektoriavaruuden <u>kanta</u> on sellainen vektorijoukko $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_p\}$ joka

(i) on lineaarisesti riippumaton

(ii) Vektoriavaruuden jokainen vektori $\bar{x}$ voidaan esittää lineaarikombinaationa kannan muodostamista vektoreista:

$$\forall \bar{x}: \quad \bar{x} \in \operatorname{Span}\{v_1, \dots v_n\}$$

ts: $\forall \bar{x} \; \exists \; c_1 \dots c_p \in \mathbb{C}$

s.e.

$$\bar{x} = c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + \dots c_p \bar{v}_p .$$

Vektoriavaruudella on aina useita eri kantoja.

<u>Esim:</u> $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

Tämä on vektori avaruuden $\mathbb{C}^2$ kanta. Lin. riippumattomuus on jo todettu. Toisaalta, jos $\bar{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ on mielivaltainen, niin

$$\bar{x} = x_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$
$$= x_1 \bar{v}_1 + x_2 \bar{v}_2$$
$$\in \operatorname{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}.$$

<u>Lause:</u> Jos vektorijoukossa $V = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_p\} \subset \mathbb{C}^n$ on enemmän alkioita (p) kuin avaruudessa dimensioita (n) (siis $p > n$), niin V on lin. riippuva.

__Perustelu:__ Jos

$$\underset{n\times p}{A} := [\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \ldots \bar{v}_p]$$

niin lin. vapauden tarkastamiseksi tutkitaan "Gaussittamalla" homogeenista yhtälöryhmää

(*) $\quad A\bar{c} = \bar{0}.$

Porrasmuodosta kaksi havaintoa

(i) korkeintaan n kpl tukialkioita, koska vaakarivejä tasan n kpl ja kullakin vaakarivillä korkeintaan yksi tukialkio

(ii) Toisaalta, laajennetussa matriisissa p + 1 pystyriviä (joista 1 tulee yhtälöiden oikeasta puolesta).

Koska $n < p$, niin jokaiselle pylväälle ei riitä tukialkiota $\Rightarrow$ on väh. yksi vapaa muuttuja

$\Rightarrow$ Yht. ryhmälle $(*)$ on epätriviaali ratkaisu $\bar{c} \neq \bar{0}$ $\Rightarrow$ V on lin. riippuva. $\blacksquare$

Huom: Jos jokin vektorijoukko sisältää nollavektorin $\bar{0}$, niin joukko on tällöin lin. riippuva.

Per: jos $\bar{v}_1 = \bar{0}$, niin

$$1 \cdot \underbrace{\bar{v}_1}_{=0} + \underbrace{0 \cdot \bar{v}_2}_{=0} + \cdots + \underbrace{0 \cdot \bar{v}_p}_{=0} = \bar{0}$$

Koska $1 = c_1 \neq 0$, niin on lin. r-va. $\blacksquare$

Lineaariset kuvaukset

<u>Määr:</u> Olkoon V_1, V_2 vektori-avaruuksia, ja $T: V_1 \to V_2$ eräs kuvaus.

T on <u>lineaarikuvaus</u> mikäli se toteuttaa:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V_1:$$

$$T(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) \tag{*}$$
$$= \alpha T(\bar{u}) + \beta T(\bar{v}).$$

(<u>Joskus</u> sanotaan, että T on lineaarinen jos se toteuttaa <u>superpositioperiaatteen</u>; viittaa kaavaan (*).)

Esim: Kaikki lin. kuvaukset toteuttavat

$$T(\bar{0}) = \bar{0}$$

koska

eri avaruuksien nollavektoreita

$$T(\bar{0}) = T(0\,\bar{0}) = 0 \cdot \underline{T(\bar{0})} = \bar{0}.$$

Pää ja häntä lasketaan tarkasti väliteen. ∎

Määr:

- Kuvaus $T : V_1 \to V_2$ on surjektiivinen eli surjektio jos

$$\forall \bar{v}_2 \in V_2 \ \exists \bar{v}_1 \in V_1 \text{ s.e.}$$

$$T v_1 = v_2 .$$

- Vektoria $\bar{v}_1$ kutsutaan vektorin $\bar{v}_2$ alkukuvaksi kuvauksen T alla.

- Vektoria $\bar{v}_2$ kutsutaan $\bar{v}_1$:n <u>kuvaksi</u> T:n alla
- Joukkoa $\mathrm{Range}\, T \subset V_2$ kutsutaan T:n <u>arvojoukoksi</u>, jossa

$$\mathrm{Range}\, T := \{\bar{v}_2 \in V_2 : \exists\, \bar{v}_1 \in V_1 \text{ jolle } T\bar{v}_1 = \bar{v}_2\}.$$

(toisinaan kirjoissa arvojoukkoa merkitään $R(T)$; $\mathrm{Ran}(T)$; $\mathrm{Im}(T)$....)

<u>Huom</u>: Siis T on surjektiivinen jos ja vain jos

$$\mathrm{Range}\, T = V_2.$$

Määr: $T: V_1 \to V_2$ on <u>injektiivinen</u> l. <u>injektio</u> mikäli

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in V_1 :$$

$$\bar{u} \neq \bar{v} \Rightarrow T(\bar{u}) \neq T(\bar{v}).$$

(Ts. kielletään se, että kahdella eri vektorilla voisi olla samat kuvat.)

Eng. kielellä injektiivisyys on usein <u>one-to-one</u>.

Huom: Jos merkitään

$$W(T) := \{ \bar{v}_1 \in V_2 : T(\bar{v}_1) = \bar{0} \}$$

niin T on injektiivinen jos ja vain jos $W(T) = \{\bar{0}\}$.

<u>Perustelu</u> oli luennolla.