20.9.2007

Vektoriyhtälö ja matriisi-vektoritulo

Määr: Vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n$ virittelmäksi (span) kutsutaan näiden vektoreiden kaikkien lineaarikombinaatioiden muodostamaa joukkoa

$$\mathrm{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$$

$$:= \{c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \dots + c_n\bar{v}_n : c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C} \text{ mielivaltaisia}\}.$$

Esim: $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Kuuluuko vektori $\bar{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ näiden vektoreiden viritelmään?

Kuuluu viritelmään jos ja vain jos $\exists\, c_1, c_2$ s.e.:

$$c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 = \bar{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ -2c_1 \\ -5c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c_2 \\ 5c_2 \\ 6c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -2c_1 + 5c_2 \\ -5c_1 + 6c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 7 \\ -c_1 + 5c_2 = 4 \\ -5c_1 + 6c_2 = -3 \end{cases}$$

Tässä yhtälöryhmän ratkeavuus tutkittaisiin "gaussittamalla".

<u>Huom</u>: Voitaisiin lähteä liikkeelle mielivaltaisesta lin. yhtälöryhmästä, ja lanseerata konsistenssikysymys edellisen esimerkin tavalla.

Määr: Olkoon A $m\times n$ -matriisi, jonka pystyrekkorit (sarakkeet) ovat

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_n;$$

ts:

$$A = [\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \ \bar{a}_n]$$

Olkoon $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ mielv. pystyvektori.

Tällöin <u>matriisi-vektoritulo</u>

$A\bar{x}$ on ~~se~~ m-vektori joka tulee kaavasta

$$A\bar{x} := x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 + \dots + x_n\bar{a}_n.$$

Huom: Matriisi-vektoritulo on määritelty **vain** jos

$$\underset{m\times n}{A}\quad \underset{n\times 1}{\bar{x}}$$

samoja!

dimensiot sopivat yhteen.

$$\underset{m\times n}{A}\left(\underset{n\times p}{B}\ \underset{p\times 1}{\bar{x}}\right)$$

ok

ok $n\times 1$

$m\times 1$ - matriisi
eli m - pystyvektori.

Esim:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{A\bar{x}}_{2\times 1 \text{ matriisi}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \Big[\cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 8 + 3\cdot 9 \\ 4\cdot 7 + 5\cdot 8 + 6\cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{enjakss} \\ \text{laskea} \end{bmatrix}.$$

<u>Lause</u>: Olkoon A $m \times n$-matriisi ja $\bar{b}$ n-dimensioinen pystyvektori.
Tällöin (matriisi)vektoriyhtälölle

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right)$ on täsmälleen sama ratkaisujoukko kuin vektoriyhtälöllä

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \cdots + x_n\bar{a}_n = \bar{b}$$

joka puolestaan on sama ratkaisujoukko kuin sillä lineaarisella yhtälöryhmällä

Laajennettu matriisi $\tilde{A}$ on

$$\tilde{A} = [A \vdots \bar{b}].$$

Perustelu: 1. ekvivalenssi on vain ja ainoastaan matriisi-vektoritulon määritelmä. 2. ekvivalenssi on taas yleinen muoto sen esimerkin laskusta, jolla tämä menee alkuun.

Huom: Matriisivektoriyhtälöllä

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

on ratkaisu jos ja vain jos kun vektori $\bar{b}$ toteuttaa

$$\bar{b} \in \text{span}\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_n\}$$

jossa $A = [\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3, \dots\ \bar{a}_n$ (A:n pystyvektoreita.)

Matriisi-vektoritulon laskusääntöjä

Olkoon A, $\bar{u}$, $\bar{v}$ sellaisia, että tulot $A\bar{u}$ ja $A\bar{v}$ on määritelty.

Tällöin

(i) $$A(\bar{u}+\bar{v}) = A\bar{u} + A\bar{v}$$

(ii) $$A(c\bar{u}) = cA\bar{u}$$
$\forall c \in \mathbb{C}$.

Huom: Ominaisuuksista (i) ja (ii) seuraa: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall \bar{u}, \bar{v}$:

$$A(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) = \alpha A\bar{u} + \beta A\bar{v}$$

Jokaista kuvausta joka toteuttaa kut c(i) ja c(ii) vektoriavaruudessa, kutsutaan <u>lineaari kuvaukseksi</u>.

Jokainen matriisi määrittää lin. kuvauksen, mutta muita on paljon (esim. derivoiminen).

<u>Perustelu:</u> $A = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots \bar{a}_n]$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}.$$

$$A(\bar{u}+\bar{v}) \overset{\text{matr.·vekt. tulon määrit.}}{=}$$

$$= (u_1+v_1)\,\bar{a}_1 + (u_2+v_2)\,\bar{a}_2 + \cdots + (u_n+v_n)\,\bar{a}_n$$

$$= u_1\bar{a}_1 + v_1\bar{a}_1 + u_2\bar{a}_2 + v_2\bar{a}_2 + \cdots + u_n\bar{a}_n + v_n\bar{a}_n$$

$$= (u_1\bar{a}_1 + u_2\bar{a}_2 + \cdots + u_n\bar{a}_n) + (v_1\bar{a}_1 + v_2\bar{a}_2 + \cdots + v_n\bar{a}_n)$$

$$= A\bar{u} + A\bar{v}$$

Ehto (ii): Jos $c \in \mathbb{C}$ niin

$$c\bar{u} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ \vdots \\ cu_n \end{bmatrix}.$$

Siten

$$A(c\bar{u}) = (cu_1)\cdot\bar{a}_1 + (cu_2)\cdot\bar{a}_2 + \cdots + (cu_n)\bar{a}_n$$

$$= c(u_1\bar{a}_2) + c(u_2\bar{a}_2) + \dots + c(u_n\bar{a}_n)$$

$$= c(u_1\bar{a}_1 + u_2\bar{a}_2 + \dots + u_n\bar{a}_n) \quad \blacksquare$$

$$= cA\bar{u}.$$

Homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä

Määr: Lineaarinen yhtälöryhmä $A\bar{x} = \bar{b}$ on homogeeninen jos $\bar{b} = \bar{0}$.

Lause: Homog. yhtälöryhmällä $A\bar{x} = \bar{0}$ on aina n.k. triviaaliratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

Epätriviaali ratkaisu $\bar{x} \neq 0$ on olemassa jos ja vain jos "gaussittamalla" saadun laajennetun matriisin $\hat{A} = [A \vdots \bar{0}]$

porrasmuoto antaa vapaita muuttujia; ts. laajennetun matriisin $[A \,\vdots\, \bar{0}]$ jokin pystyrivi (paitsi kaikkein oikeanpuoleisin) ei sisällä tukialkiota.

Perusta ohitetaan.

Epähomog. yhtälöryhmän ratkaisujen parametriesitys

Esim.:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

ratkaise $A\bar{x} = b$!

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & 8 & -4 \end{array}\right] \sim \dots \sim .$$

redusoitu porrasmuoto

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} \boxed{1} & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Takaisin yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 \qquad - \frac{4}{3} x_3 = -1 \\ \qquad x_2 \qquad = 2 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

x_3 on vapaa muuttuja

Ratkaisu: $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} x_3 - 1 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3} x_3 \\ 0 \cdot x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

jossa $x_3 \in \mathbb{C}$ on mielivaltainen.

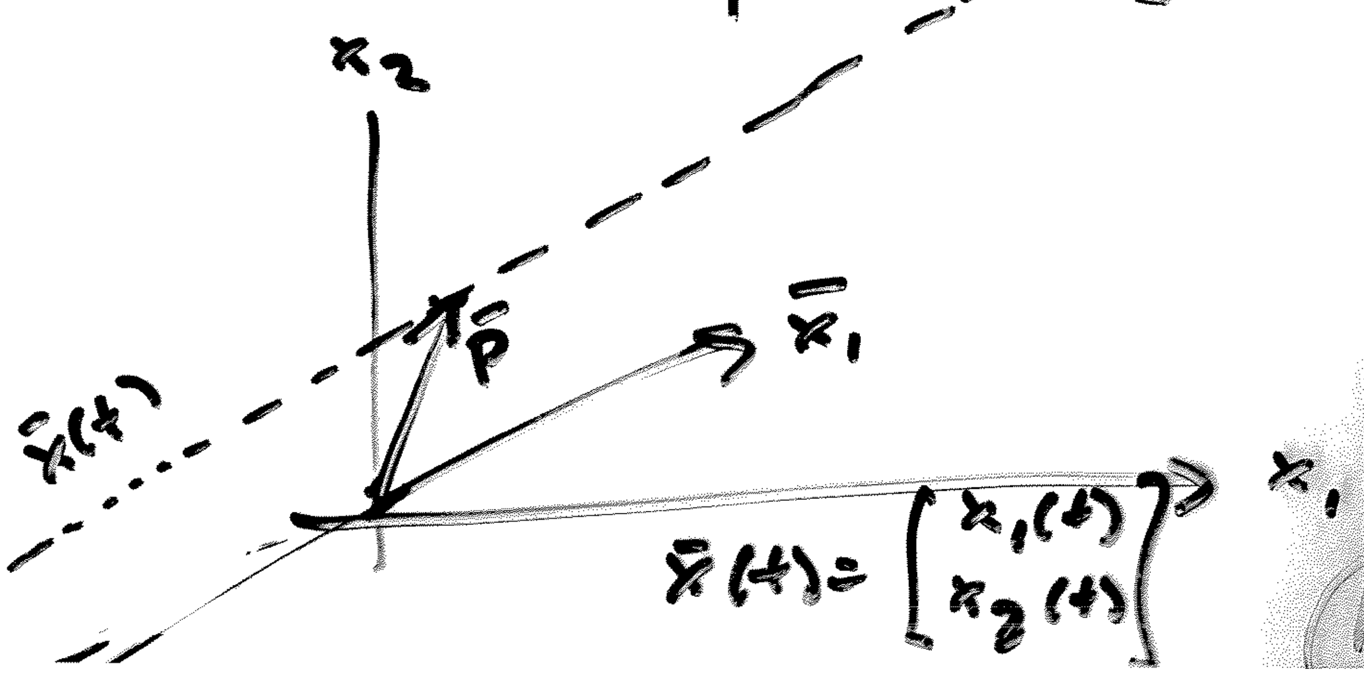
Tämä idea toimii yleisesti useammankin vapaan muuttujan tapauksessa: Yhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ ratkaisut voidaan aina esittää lineaarikombinaationa

$$\bar{x} = \bar{p} + \bar{x}_1 t_1 + \bar{x}_2 t_2 + \cdots \bar{x}_k t_k$$

jossa parametrit $t_1, \dots t_k$ tulevat vapaista muuttujista (kuten x_3 edellä esimerkissä).

<u>Geometrinen idea</u>:

$$\bar{x}(t) = \bar{p} + t\,\bar{x}_1, \quad t \in \mathbb{R}$$



Lause: Oletetaan että yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on eräs (yksittäinen) ratkaisu $\bar{p}$ ($A\bar{p} = \bar{b}$).

Olkoon

$$N(A) := \{ \bar{x} : A\bar{x} = \bar{0} \}$$

vastaavan homogeenisen yhtälön kaikkien ratkaisujen joukko.

Tällöin yhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ kaikkien ratkaisujen joukko on

$$\{ \bar{p} + \bar{v}_h : \bar{v}_h \in N(A) \}.$$

Perustelu: Seuraavalla luennolla.