Porrasmuoto ja redusoitu porrasmuoto

19.9.2007

Esimerkki porrasmuotoisesta matriisista

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c}
0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & *
\end{array}\right]$$

$\blacksquare \neq 0$ tukialkio

$*$ = "hällä väliä"

(voivat olla nollia, mutta voivat olla olemattakin.)

Porrasmuodossa toteutuvat seuraavat ehdot:

1. Jokainen pelkkää nollaa sisältävä vaakarivi on alempana kuin yksikään sellainen vaakarivi, jossa jokin elementti $\neq 0$

2o Tukialkio (eli kunkin vaakarivin ensimmäinen nollasta poikkeava elementti vasemmalta) kullakin rivillä sijaitsee vasemmalle sitä alempien rivien tukialkioista: porrasmaisuus.

3o Tukialkioiden alapuolella sijaitsee pelkkää nollaa.

Määr: Matriisi on porras-muotoinen jos ja vain jos yllä olevat 3. ehtoa toteutuu.

Määr
Matriisi on redusoidussa porrasmuodossa jos se on porrasmuotoinen ja lisäksi

1o jokainen tuki-alkio = 1

2o jokaisen tukialkion yläpuolella on pelkkää nollaa

Esim. redusoidusta porrasmuodosta:

$$
\left[\begin{array}{cccccccc|c}
0 & \boxed{1} & * & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & * & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & *
\end{array}\right]
$$

Jokainen matriisi voidaan viedä <u>redusoituun</u> porrasmuotoon seuraavasti

1. Viedään ensin porrasmuotoon

2. Jaetaan kukin vaakarivi sisältämällään (nollasta poikkeavalla) tukialkiolla.

3. Korvaamalla vaakarivejä itsensä ja erään alemman vaakarivin sopivilla monikerralla.

Lause: Jokainen matriisi on riviekvivalentti erään yksikäsitteisen redusoidun porrasmuotomatriisin kanssa

Määr: Matriisit A ja B ovat riviekvivalentteja jos B saadaan A:sta tekemällä alkeisrivioperaatioita.
Merkitään $A \sim B$.

Riviekvivalenssi on ekvivalenssirelaatio; ts. se toteuttaa

(1) $A \sim B$ ja $B \sim C$ niin silloin $A \sim C$
(transitiivisuus)

(2.) $A \sim A$
(refleksiivisyys

(3) $A \sim B$ niin myös $B \sim A$.

Sukulaisuussuhde on toinen esimerkki ekvivalenssirelaatiosta. Looginen ekvivalenssi $\Longleftrightarrow$ on ekvivalenssirelaatio. Kompleksilukujen yhtäsuuruus on myös.

<u>Esim.</u> Oletetaan että pitkän mekaanisen laskun jälkeen olemme saaneet yhtälöryhmän laajennetun matriisin $\tilde{A} = [A \,|\, b]$ porrasmuotoon

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \qquad\quad \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 3 & 0 & 24 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right] \end{array}$$

Huom! on komponentti 0

Takaisin yhtälöryhmäksi:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 24 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

Tukialkiopystyrivien määräämiä muuttujia kutsutaan <u>kantamuuttujiksi</u>

$$x_1 = 24 + 2x_3 - 3x_4$$
$$x_2 = -7 + 2x_3 - 2x_4$$
$$x_5 = 4$$

Loput ovat <u>vapaita</u> muuttujia

$$x_3, x_4 \in \mathbb{C}$$

Tällä tavoin saatiin parametrisointi alkuperäisen yhtälöryhmän kaikki ratkaisut vapaiden muuttujien avulla.

<u>Huom:</u> Tukialkioiden määräämät pystyrivit porrasmuodossa antavat kantamuuttujat ja vapaat muuttujat.

Lause: a) Lineaarinen yhtälöryhmä on konsistentti jos ja vain jos sen laajennetun matriisin $\tilde{A} = [A \vdots b]$ porrasmuoto ei sisällä vaakariviä muotoa

$$[0 \text{ ——— } 0 \vdots b']$$

jossa $b' \neq 0$ (mahdoton yhtälö).

b) Konsistentin lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu on yksikäsitteinen jos ja vain jos jokaiselle porrasmuodon pystyrivillé (poislukien oikeanpuolimmainen katkoviivalla erotettu pystyrivi) on tukialkio (ts. vapaita muuttujia ei ole, vaan kaikki muuttujat ovat kantamuuttujia).

Avaruuden $\mathbb{C}^n$ vektorit

Pystyvektori on $n \times 1$-matriisi

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} ; \forall j : u_j \in \mathbb{C}$$

(Välisoitto kvanttori-gymnastiikkaa:

"$\forall x \in \mathbb{C}$:" tarkoittaa "kaikki x jotka kuuluvat $\mathbb{C}$:hen ja toteuttavat:"

Merkki $\forall$ on "universaali-kvanttori

"$\exists x \in \mathbb{C}$:" tarkoittaa "on olemassa (ainakin yksi) x joukossa $\mathbb{C}$ siten että:")

Notaatiosta: yläviiva tarkoittaa konjugointia.
jo aiemmin

Esim:

$$\overline{\overline{u}} = \begin{bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \vdots \\ \overline{u}_n \end{bmatrix}.$$

vektori konjugoitu kompo-
nenteittain!

Avaruudessa $\mathbb{C}^n$ voidaan **summata**:

$$\overline{u} + \overline{v} \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$:= \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

ja **kertoa skalaarilla** $c \in \mathbb{C}$:

$$c\overline{u} := \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ \vdots \\ cu_n \end{bmatrix}.$$

Huom.

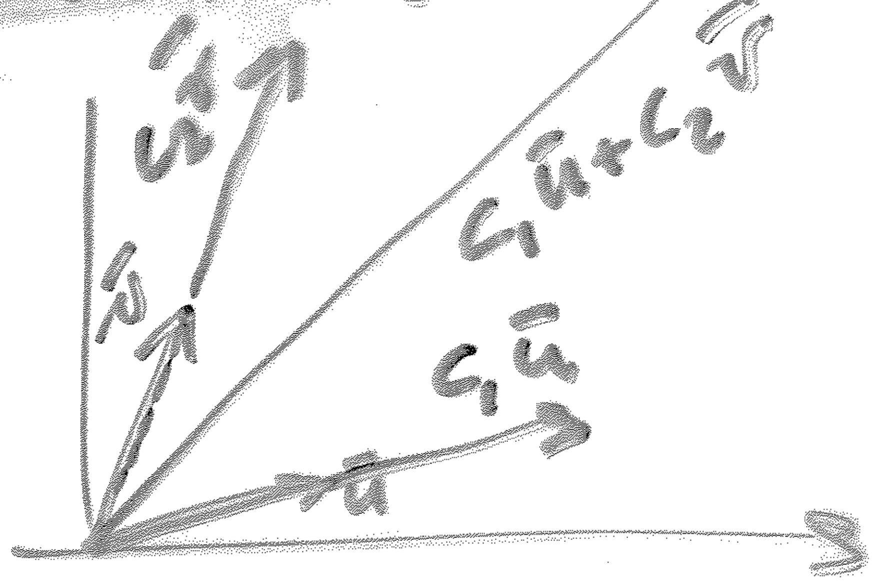
$$\bar{c}\,\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{c}u_1 \\ \bar{c}u_2 \\ \vdots \\ \bar{c}u_n \end{bmatrix}.$$

<u>Määr:</u> Vektori $\bar{w}$ on <u>lineaari-kombinaatio</u> vektoreista $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ jos on olemassa skalaarit c_1, c_2 ($c_1, c_2 \in \mathbb{C}$) siten että

$$\bar{w} = c_1\bar{u} + c_2\bar{v}.$$

(Samoin jos vektoreita $\bar{u}, \bar{v}, \ldots$ on mielivaltainen äärellinen määrä.)

Geometrinen merkitys $\mathbb{R}^2$, skalaarit $\mathbb{R}$:ssä



Vektoriavaruuden aksioomat

V on **vektoriavaruus**, jos $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $c, d \in \mathbb{C}$ toteuttavat seuraavat laskulait $(+, \cdot)$

(i) $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

(ii) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

(iii) $\exists$ nollavektori $\bar{0}$ joka toteuttaa

$$\bar{u} + \bar{0} = \bar{u} \quad \forall \bar{u} \in V$$

ja $\bar{0}$ on yksikäsitt.

(iv) kaikilla vektoreilla $\bar{u}$ on yksikäsitt. vastavektori $(-\bar{u})$:

$$\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}.$$

(v) $c(\bar{u} + \bar{v}) = c\bar{u} + c\bar{v}$

(vi) $(c+d)\bar{u} = c\bar{u} + d\bar{u}$

(vii) $c(d\bar{u}) = (cd)\bar{u}$

(viii) $1\bar{u} = \bar{u}$.

__Esim:__ $n \times 1$ -matriisit ovat vektoreita.

$$C([0,1]) := \{ \text{välillä } [0,1] \text{ määriteltyjen jatkuvien funktioiden joukko} \}.$$

Tämä on vektoriavaruus jos summa ja skalaarilla kertominen määritellään

$$f, g \in C([0,1]), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\forall t \in [0,1] \begin{cases} (f+g)(t) := f(t) + g(t) \\ (\alpha f)(t) := \alpha f(t) \end{cases}$$

Samalla tavalla n. kertaa derivoituvien funktioiden joukko $C^n([0,1])$ on vektoriavaruus. $\blacksquare$