18.9.2007

Yleinen kompleksiluvun potenssi

Reaalilukujen tapaus?

$x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $x > 0$

$$x^c = ?$$

Määr: x^c on se reaaliluku (reaaliaritmetiikalla), jonka logaritmi on

$$c \ln x.$$

Kompleksilukuaritmetiikassa käytetään samaa ideaa, mutta huomioidaan että $\ln z$ on moniarvoinen, $z \in \mathbb{C}$.

Siis:

Jos $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $c \in \mathbb{C}$ niin

$$z^c := e^{\underbrace{c \ln z}_{\text{moniarvoinen}}}$$

Tällöin z^c on tyypillisesti moniarvoinen.

Esim

$$z^{1/2} = \sqrt{z}$$

on kaksiarvoinen kuten aiemmin.

Esim:

$$2^i = ?$$

Tämän logaritmi on

$$i \ln 2$$

$$= i(\operatorname{Ln} 2 + 2\pi i \cdot k),\ k \in \mathbb{Z}$$

1 pääarvo, reaaliluvun
2 luonnollinen reaalilogaritmi

$= i\ln 2 - 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

Siis

$$2^{i} = e^{i\ln 2 - 2\pi k}, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$= e^{-2\pi k}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2)$$

$k \in \mathbb{Z}.$ ∎

Lineaariset yhtälöryhmät

Lineaarinen yhtälö

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots a_nx_n = b_1$$

Luvut $x_1 \dots x_n$ ovat yhtälössä muuttujia l. tuntemattomia.

Luvut $a_1 \dots a_n$ ovat kertoimia (tunnettuja.)

Yhtälön "oikea puoli" b_2 on myös "dataa" (tunnettu).

Lineaarinen yhtälöryhmä on joukko lin. yhtälöitä joiden muuttujat ovat yhteisiä.

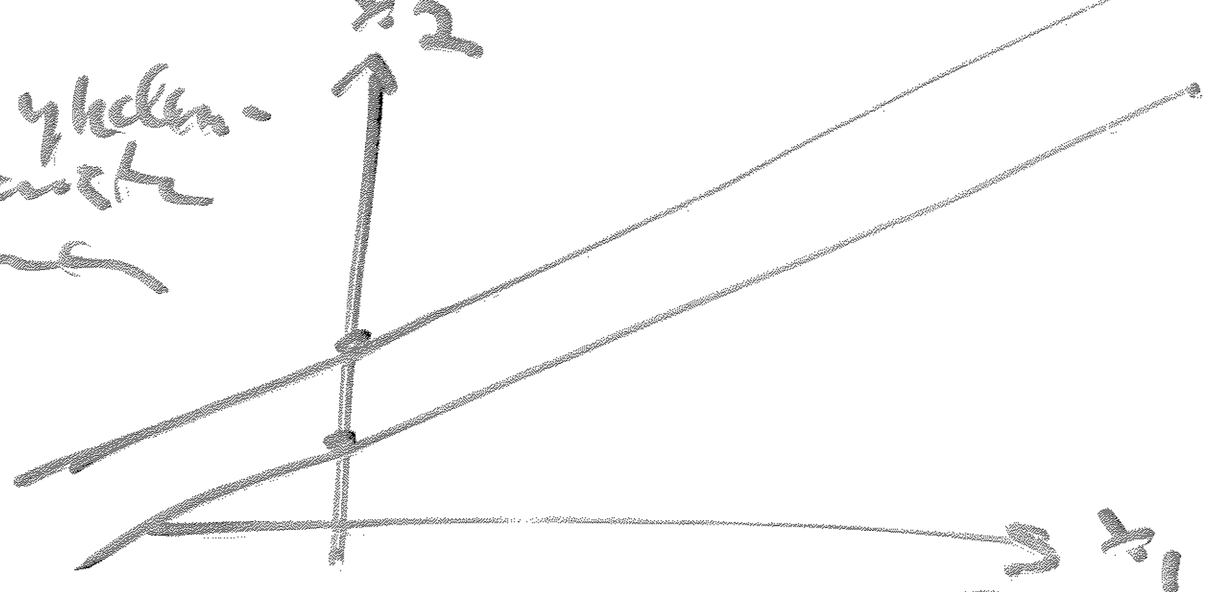
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Näillä luennoilla sallimme kompleksiluvut sekä kertoimiksi a_{jk}, dataksi b_j sekä ratkaisuiksi $x_1, \ldots, x_n$.

<u>Esim:</u> Geometria $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{0 = 2}$$

Kaksi yhdensuuntaista suoraa



Esim.:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 - 2x_2 = -1$$

Ratkaisuja kaikki tämän suoran pisteet (äärettömän monta)

Esim: Arvotaan luvut $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Todennäköisyydellä 1 nämä suorat eivät ole yhdensuuntaisia

$\Rightarrow$ Täsmälleen yksi leikkauspiste (x_1, x_2); yhtälöryhmän ratkaisu yksikäsitteinen.

Täysin yleisesti:

Lineaarisella yhtälöryhmällä on joko

a) ei lainkaan ratkaisuja

b) täsmälleen yksi ratkaisu

c) äärettömän monta ratkaisua

Muita vaihtoehtoja ei ole.

Matriisiesitys

yhtälöryhmän

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

kerroinmatriisi A on

lukutaulukko

$$m\left\{ A := \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n} \right. \quad (**)$$

Yhtälön oikea puoli antaa matriisin

$$b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriisia A kutsutaan <u>$m \times n$ - matriisiksi</u>.
Matriisi b on samalla logiikalla <u>$m \times 1$</u> <u>- matriisi</u>, <u>ts.</u> m- pysty<u>vektori</u>.

<u>n-vaakavektoreiksi</u> kutsutaan $1\times n$-matriiseja muotoa

$$c = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n].$$

Matriisin A alkioita $a_{j,k}$ kutsutaan matriisielementeiksi; lyhennetty kirjoitustapa

$$\underset{m\times n}{A} = [a_{j,k}]_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$$

joka tarkoittaa samaa kuin yhtälö (*) yllä.

<u>Määr:</u> Kaksi matriisia A ja B ovat $\begin{cases}\text{yhtäsuuria} \\ \text{ekvivalentteja}\end{cases}$

jos:

a) matriisien dimensiot ovat samoja (molemmat $m \times n$ - matriiseja samalle $m, n \in \mathbb{N}$

b) jos

$$A = [a_{jk}], \quad B = [b_{jk}]$$

niin tällöin

$$a_{jk} = b_{jk}$$

kaikilla $\begin{cases} j = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, n. \end{cases}$

Koko yhtälöryhmän "data" kootaan ns. laajennetuksi matriisiksi (augmented matrix):

$$\underset{m\times(n+1)}{\tilde{A}} := \left[\underset{m\times n}{A} \,\vdots\, b\right]$$

eli elementeittäin:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

<u>Yhtälöryhmän ratkaisu</u>

<u>Gaussin eliminaatiolla</u>

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & \Big| \cdot 4 \\ \phantom{x_1 -{}} 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ \quad -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 4x_3 = 4 \\ \quad -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 4x_3 = 4 \\ \quad x_3 = 3 \end{cases}$$

Sűs $x_3 = 3$.

Tontesh ugutalerte

$$x_2 = 4 + 4x_3 = 4 + 12 = 16$$

Lopuksi

$$x_1 = 2x_2 - x_3$$

$$= 2 \cdot 16 - 3 = 29$$

Siis: yhtälöryhmä (1) osoittautui ekvivalentiksi seuraavan triviaalin yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 = 29 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

kanssa.

Samat laskutoimitukset tehdään yleensä laajennetun matriisin avulla

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & 9 \end{array}\right]$$

Edellä tehty operaatio koostui kolmenlaisista operaatioista

1. Jonkin vaakarivin korvaaminen itsensä ja erään toisen vaakarivin erään moninkerran summalla

2. Kaksi vaakariviä vaihdetaan keskenään (tätä ei tarvittu esimerkissä)

3. Jonkin yhtälön kertominen <u>nollasta poikkeavalla</u> vakiolla.

Näitä "pikkuliikkeitä" kutsutaan <u>alkeisrivioperaatioiksi</u>.

Gaussin eliminaatio

on alkeisrivioperaatioiden systemaattista käyttämistä ns. porrasmuotoon pääsemiseksi.

Gaussin eliminaatiolla ratkaistaan pääasiallisesti kahdentyyppisiä ongelmia:

1. Onko annetulle lin. yhtälöryhmälle ratkaisua ensinkään?

2. onko lin. yhtälöryhmä konsistentti.

② Jos yht. ryhmä on konsistentti, niin tulee etsiä kaikki ratkaisut.

Esim: konsistentti

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{0} & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right] \cdot\left(-\tfrac{5}{2}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & \boxed{1} & -4 & 8 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array}\right]$$

Jos tämä tulkitetaan lin. yhtälöryhmäksi, niin

(17...

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = 8 \\ 0 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Mahdoton yhtälö! Epäkonsistentti.