13.9.2007

Esim: $n \in \mathbb{N}$. Laske

$$\sqrt[n]{1} = w$$

Tällä juurelle w on n kpl erisuuria arvoja kompleksitasossa.

$$z = 1: \quad \sqrt[n]{z} = ?$$

Polaarimuotoon

$$z = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

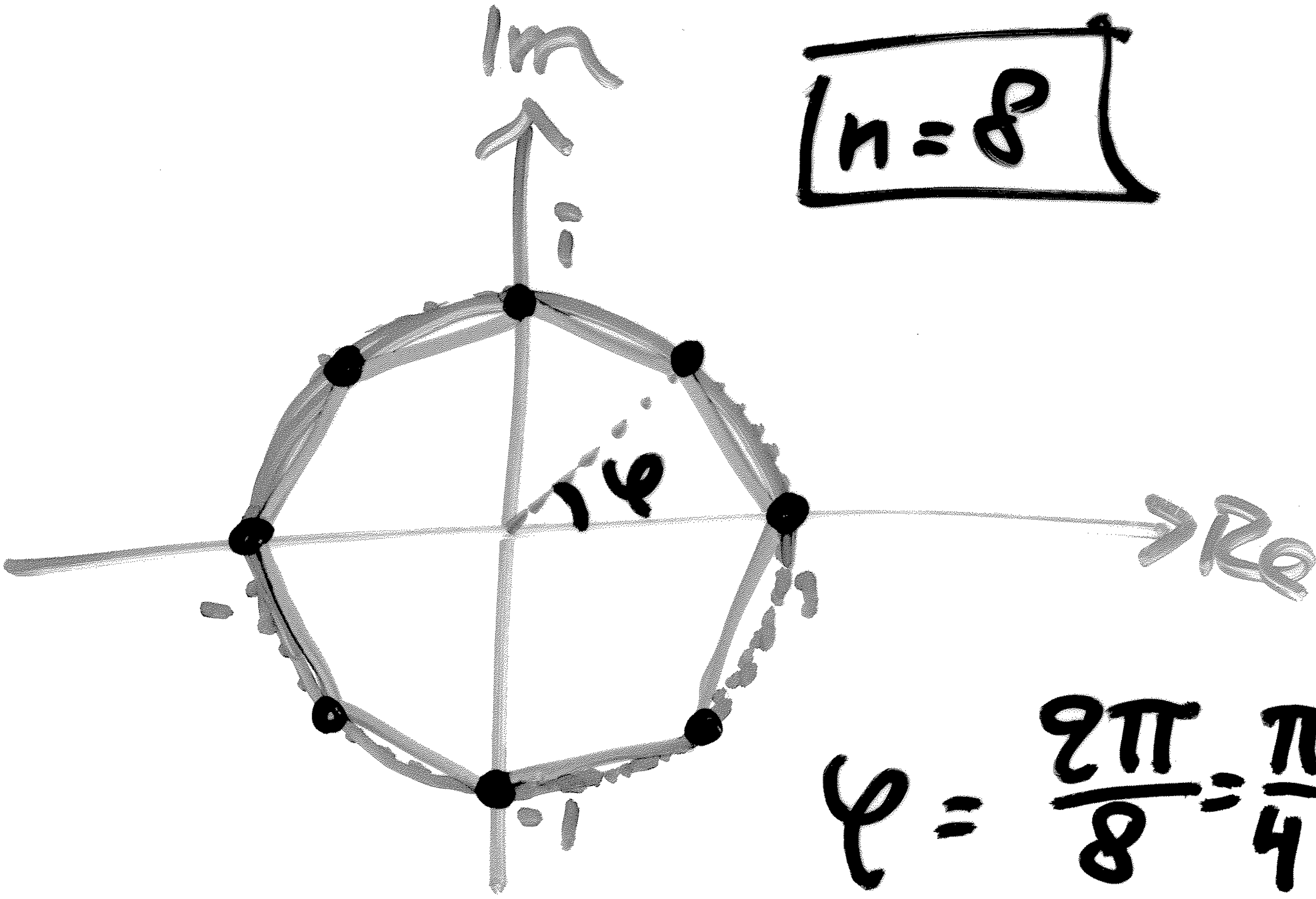
$$\sqrt[n]{z} = \underbrace{\sqrt[n]{1}}_{=1}\left(\cos\left(\frac{0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right.$$

$$\left. + i \sin\left(\frac{0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)$$

jossa $k = \underbrace{0, \ldots, n-1}_{n \text{ kpl.}}$

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

$$k = 0, \ldots, n-1.$$



$\boxed{n = 8}$

$$\varphi = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Näitä lukuja kutsutaan <u>n. ykkösen juuriksi</u>;
(nth roots of unity).

Kompleksilukujen eksponenttifunktio

Kuinka laskin laskee lukuun

$\sin e$

likiarvon? Vastaus: laskin operoi polynomeilla, jotka ovat "hyvin lähellä" funktioita $\sin x$, e^x jn.e.

Eräs tapa tehdä tämä on käyttää ns. Taylorin polynomeja ja sarjoja.

Jos f on "kiltti" funktio $\mathbb{R}$:llä tai jopa $\mathbb{C}$:llä siten että sillä on kaikki derivaatat $f^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$.

?

Tällöin, jos t_0 on f:n määritt. joukossa

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!} f''(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(t_0)(t-t_0)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(t_0)(t-t_0)^4 + \ldots$$

Tässä t_0 on yllä olevan Taylorin sarjan <u>kehitys</u> <u>keskipiste</u>.

Kilteille funktioille preteri "suppenee", ts. sarjan "häntä" voidaan heittää pois ja f:stä saadaan vain tarkka arvo luvulle $f(t)$.

Esim.:

$$f(t) = \sin t$$
$$f'(t) = \cos t$$
$$f''(t) = -\sin t$$
$$f^{(3)}(t) = -\cos t$$
$$f^{(4)}(t) = \sin t$$

Kehityskeskipiste $t_0 = 0$, Taylorin sarjaksi:

$$\sin t = 0 + 1 \cdot (t-0) + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot (t-0)^2 + \frac{1}{3!}(-1)(t-0)^3 + \ldots$$

$$= t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \ldots$$

Samoin

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 \ldots$$

Esim: $f(t) = e^t$

$f^{(k)}(t) = e^t$

$f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, joten

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3$$

$$(*) \quad + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 + \frac{1}{6!}t^6 + \dots$$

Luvun $y i \in \mathbb{C}$ eksponenttifunktio määritellään sarjan $(*)$ avulla:

$$e^{iy} = 1 + (iy) + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \frac{1}{3!}(iy)^3 + \frac{1}{4!}(iy)^4 + \frac{1}{5!}(iy)^5 \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \dots\right)$$

$$+ i\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \dots\right)$$

$= \cos y + i \sin y$!!!

$\boxed{\text{Eulerin kaava}}$

Samalla tavalla

Jos $z = x + yi$

$$e^z = e^{x+yi}$$

$$= e^x e^{yi}$$

$$= e^x(\cos y + i \sin y).$$

Tämä on luvun e^z, $z \in \mathbb{C}$ määritelmä.

$$e^{i\pi} = \underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{0}$$

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Kompleksilukuun eksponenttiesitys

Polaarimuoto

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \overset{\text{Euler!}}{=} re^{i\varphi}$$

Lyhyt ja "kompakti" tapa kirjoittaa kompleksiluku polaarimuodossa.

8.

Mitä iloa laskuissa!

Tulon laskeminen helppoa:

$$\begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \end{cases}$$

Eksp. laskulaki

$$(*) \qquad e^{x+y} = e^x e^y$$

antavat

$$z_1 z_2 = (r_1 \cdot r_2) e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}$$

$$= r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Kompleksiluvulla kertominen merkitsee kiertoa origon ympäri argumentin verran — välitön yhteys laskusääntöön (*).

Argumentin monikäsitteisyys, eli 2π-jaksollisuus ilmenee seuraavasti:

$$z = re^{i\varphi} \stackrel{?}{=} re^{i(\varphi+2\pi)}$$

$$e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi} \cdot \underbrace{e^{i\cdot 2\pi}}_{=1}$$

Nyt

$$e^{i\cdot 2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = \underbrace{\cos 0}_{=1} + i \underbrace{\sin 0}_{=0}$$

$$= 1$$

Siis

$$re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+2\pi)}.$$

Kompleksiluvun logaritmi

Olkoon

$$z = re^{i\varphi} \neq 0$$

kompleksiluku.

Jotta kompleksiluvun logaritmi olisi luonnollinen laajennus reaaliluvun logaritmista, niin ensimmäinen vaatimus olisi:

$$\ln z = \ln(r e^{i\varphi})$$

$$\overset{\text{tulo}\to\text{summaksi}}{=} \ln r + \ln e^{i\varphi}$$

$$= \ln r + i\varphi + 2\pi i \cdot k$$

$$k \in \mathbb{Z}.$$

(Viimeinen arkel koska $e^{2\pi i \cdot k} = (1)^k = 1,\ k \in \mathbb{Z}.$)

Koska $z \mapsto e^z$ kuvaa kunt z ja $z + 2\pi i \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$, samalle luvulle, niin "käänteisfunktiolla" pitää olla kussakin pisteessä äärettömän monta arvoa.

Sanity check:

$$\ln z = \ln \overbrace{|z|}^{=r} + i\varphi + 2\pi i \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

niin

$$e^{\ln z} \overset{k \in \mathbb{Z}}{=} e^{\ln r + i\varphi + 2\pi i \cdot k}$$

$$= e^{\ln r + i\varphi} \cdot \underbrace{e^{2\pi i \cdot k}}_{=1}$$

$$= e^{\ln r + i\varphi}.$$

Esim:

Etsi kaikki $z \in \mathbb{C}$ joilla pätee
$$e^z = 3+4i;$$
ts. määritä $\ln(3+4i)$.

$$e^z = \underbrace{\sqrt{3^2+4^2}}_{5}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$= 5e^{i\varphi}$$
jossa $\arctan\varphi = \frac{4}{3}$

($3+4i$ sijaitsee 1 kvadrantissa, jolloin $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.)

Siis
$$e^z = 5e^{i\varphi}$$

$$z = \ln(5e^{i\varphi})$$

$$= \ln 5 + i\varphi + 2\pi i \cdot k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

jossa $\varphi \in (0, \pi/2)$ s.e. $\overline{\text{arc}}\tan \varphi = \frac{4}{3}$. $\blacksquare$

<u>**Logaritmin laskulait:**</u>

Olkoon $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\begin{cases} e^{\ln z} = z & \text{(luku!)} \\ \ln e^{z} = z + 2\pi i \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} & \text{(joukko!)} \end{cases}$$

Yhteenlaskukaavat toimivat samalla tavoin erikoisesti:

$$(**) \quad \ln a \cdot b \overset{?}{=} \ln a + \ln b$$

Totta jos unohdetaan että yhtälön molemmat puolet voivat erota $2\pi i$:n monikerran verran.

Luonnollisen logaritmin $\ln z$ pääarvo $\operatorname{Ln} z$ on ~~se~~ luku joukosta $\ln z$ jossa luvun argumentti (eli $k \in \mathbb{Z}$) on valittu siten, että

$$\varphi + 2\pi k \in (-\pi, \pi].$$

15

Jolloin

$$\ln z = \{ \operatorname{Ln} z + 2\pi i \cdot k : k \in \mathbb{Z} \}$$

Joukkojen kautta katsottuna laskukaava (**) antaa.