Konjugaatti gymnastiikkaa eli liittolukujumppaa

$$\begin{cases} z_i = x_i + y_i i \\ \bar{z}_i = x_i - y_i i \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

Laskusääntöjä:

(i) $$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

(ii) $$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

(iii) $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

(iv) $$\overline{(\bar{z})} = \bar{\bar{z}} = z$$ Involuutio

Perustelu väitteelle (ii)

$$z_1 = x_1 + y_1 i \qquad z_2 = x_2 + y_2 i$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_2 y_1 + y_2 x_1) i$$

$$\overline{z_1 z_2} = (-,,-) - (-,,-) i$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (-x_2 y_1 - y_2 x_1) i$$

vertaamalla huomataan samoiksi. ∎

Qo

Lause: Olkoon $p(\cdot)$ reaalikertoiminen kompleksimuuttujan z polynomi:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Tällöin:

(i) $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$

(ii) Yhtälön $p(z) = 0$ kompleksiset juuret esiintyvät kompleksikonjugaattipareittain; (jos $z = x + yi$ on juuri, $y \neq 0$, niin myös $\bar{z}$ on juuri.)

Perustelu: $\boxed{(i)}$

$$\overline{p(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}$$

$$= \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \overline{a_2 z^2} + \cdots + \overline{a_n z^n}$$

$$= \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_2} \cdot \overline{z^2} + \cdots + \overline{a_n} \cdot \overline{z^n}$$

$$\left(\overline{z^j} = \overline{\underbrace{z \cdots z}_{j \text{ kpl}}} = \bar{z} \cdot \bar{z} \cdot \bar{z} \cdots \bar{z} = \bar{z}^j \right)$$

$$= \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \bar{z} + \overline{a_2} \cdot \bar{z}^2 + \cdots + \overline{a_n} \cdot \bar{z}^n$$

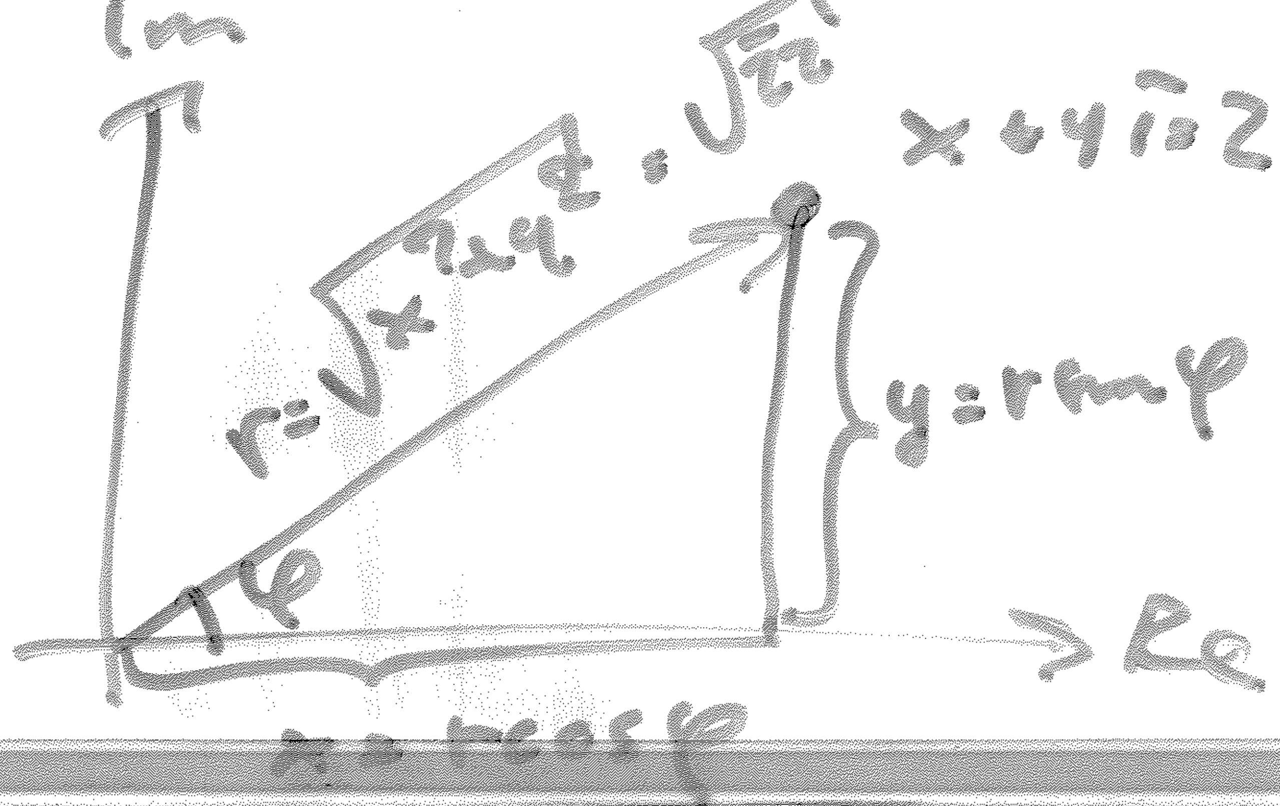
(koska a_j:t ovat reaalisia)

$$= a_0 + a_1 \bar{z} + a_2 \bar{z}^2 + \cdots + a_n \bar{z}^n$$

$$= p(\bar{z})$$

$\boxed{(ii)}$ jos $P(z)=0$
(eli z on juuri) niin
$\overline{P(z)} = \overline{0} = 0$ joten
$P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = 0$ kohdan
(i) perusteella. ■

Kompleksilukujen tulo laskettuna polaarimuodossa



Trigonometrisillä kaavoilla saadaan (jos $x, y > 0$)

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

(ei totta yleisessä tapauksessa)

Huom: $\begin{cases} \sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi \\ \cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi \end{cases}$

joten kulma φ ei edes oikein laskettuna määräydy yksikäsitt.

On olemassa eräs $\varphi = \tilde{\varphi}$ kullekin kompleksiluvulle joka toteuttaa

$$-\pi < \tilde{\varphi} \leq \pi$$

Tätä kulmaa $\tilde{\varphi}$ kutsutaan argumentin <u>pääarvo</u>:

Jos

$$z = x + yi$$

ja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

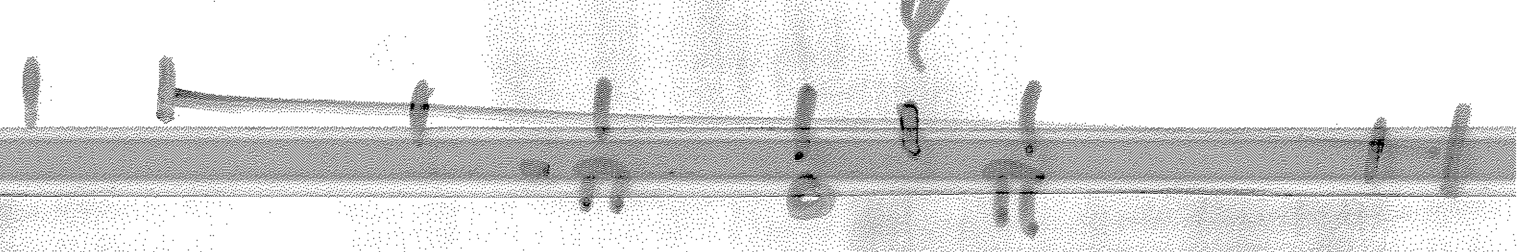
jossa $\varphi \in (-\pi, \pi]$

niin tällöin on luvun z argumentin pääarvo ja merkitään

$$\varphi = \operatorname{Arg} z, \quad z \neq 0$$

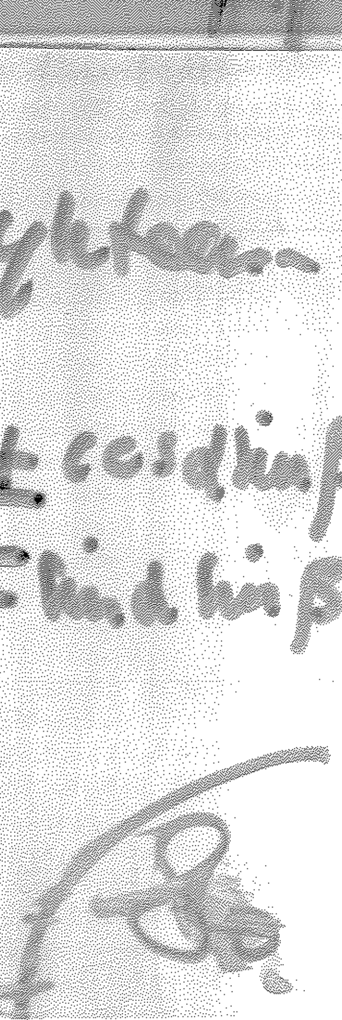
Kompleksiluvun z argumentilla (yleensä) tarkoitetaan joukkoa

$$\arg z = \{ \operatorname{Arg} z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \}$$



Sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat:

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$



$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= r_1 r_2 \Big[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)$$

$$+ i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)$$

$$= (r_1 r_2) \Big[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \Big]$$

Selventävä huomautus:

$$z_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$$

$$z_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$$

jossa $\varphi_1 \approx \pi$ ja

$(-\pi < \varphi_1 \le \pi)$

ja $\varphi_2 \approx \pi$

$(-\pi < \varphi_2 \le \pi)$.

Tulo polaarimuodossa

$$z_1 z_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Koska $\varphi_1, \varphi_2 \approx \pi$, niin

$$\underbrace{\varphi_1 + \varphi_2}_{\notin [-\pi,\pi]} \approx 2\pi \notin (-\pi, \pi].$$

Nyt olisi:

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2)$$

$$= \varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi$$

$$\in (-\pi, \pi].$$

Samoin lasketaan pääarvo kun useampia kompleksilukuja kerrotaan!

Siis

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2)$$

$$\neq \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

mutta

$$\arg(z_1 z_2) =$$

$$\underbrace{\arg z_1 + \arg z}_{\text{kahden joukon summa?}}$$

jossa joukko $\arg z_1 + \arg z_2$ määritellään erikoistapauksena

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ ja } b \in B\}.$$

Voidaan myös kirjoittaa

$$\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1 z_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Kompleksilukujen potenssit

Jos

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

niin $(n \in \mathbb{N})$

$$z^n = r^n \cdot [\cos(\underbrace{\varphi+\varphi+\dots+\varphi}_{n\text{ kpl}}) + i\sin(\underbrace{\varphi+\dots+\varphi}_{n\text{ kpl}})]$$

$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Tästä seuraa

$$|z^n| = r^n = |z|^n$$

koska $\sin^2 n\varphi + \cos^2 n\varphi = 1$

myös

$$\arg(z^n) = n\arg z$$

jossa

Jossa joukko $n \cdot \arg z$ on erikoistapaus

$$xA := \{xa : a \in A\}.$$

Esim:

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

Toisella vaikeammalle tavalla:

$$z^2 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\cdot\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$+\, i(\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)$$

Alto

Nämä tulokset ovat samoja; siis:

$$\begin{cases} \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \\ \sin 2\varphi = \sin\varphi\cos\varphi \\ \qquad\quad + \cos\varphi\sin\varphi \\ \qquad = 2\sin\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

(Huom: $\cos^2 + \sin^2 = 1$ josta saadaan

$$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$$

ja

$$-\frac{\cos 2\varphi - 1}{2} = \sin^2\varphi$$

josta kaava puolikas-kulman kosinille)

Määr: Kaavaa

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

kutsutaan <u>deMoivren</u> kaavaksi.

Kompleksiluvun juuret

Olkoon $z \in \mathbb{C}$ kompleksiluku. Tällöin lukuja $w \in \mathbb{C}$ kutsutaan z:n n. <u>juuriksi</u> jos

$$w^n = z; \quad n \in \mathbb{N}$$

eli $z \in \mathbb{C}$ on annettu, niin sen n. juuret.

ei ole yksikäsitt. luku
vaan <u>joukko lukuja</u>

$$z \in \mathbb{C}$$

$$\sqrt{z} = \{-|\sqrt{z}|, +|\sqrt{z}|\}$$

joukko.

Korkeammat juuret
polaarimuodolla.

~~$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$~~
~~$w = R(\cos$~~

$$\begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ w = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{cases}$$

jossa $w^n = z$.

$$w^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$= z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^n \cos n\varphi = r\cos\theta \\ R^n \sin n\varphi = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^n = r \\ \sin n\varphi = \sin\theta \\ \cos n\varphi = \cos\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[n]{r} \geqslant 0 \\ n\varphi = \theta + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi k}{n} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vaikka parametri $k \in \mathbb{Z}$
saa äärettömän monta
arvoa, tarvitsee ottaa
huomioon vain

$$\underbrace{k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}_{n \text{ kpl}}$$

koska laskettava juuri

$$w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ei [illegible] 2π monikerran lisäyksellä muutu

Johtopäätös:

Kompleksiluvun z n. juuri on n-arvoinen (kompleksilukujen muodostama joukko.)

Lösung:

$$z = |z|(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\left(0 + \frac{2\pi k}{2}\right)\right.$$

reelle

$$\left. + i \sin\left(0 + \frac{2\pi k}{2}\right)\right)$$

jeweils $k = 0, 1$

beide Lösungen

$k=0$

$$\sqrt{z} = |\sqrt{z}| > 0$$

$k=1$

$$\sqrt{z} = -|\sqrt{z}| < 0.$$