11.9.2007

Kompleksiluvut

Olkoon x "hypoteettinen olio" jolla lasketaan kuten reaaliluvuilla ja toteuttaa yhtälön

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 4 = 0$$

Nähdään, että x ei voi olla reaaliluku, koska jos olisi niin

$$(x-1)^2 \geq 0$$

$$\underbrace{\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{4}_{> 0}}_{> 0} = 0$$

ts.

$\Rightarrow$ ristiriita. reaaliluku on joko nolla tai $\neq 0$, mutta ei molempia yhtäaikaa.

(Todistus ristiriidan kautta. Reductio ad absurdum.)

Siis, $x \notin \mathbb{R}$ mutta voiko x olla demaan sellain ovelammalla tavalla ilman, että syntyisi ristiriitaa?

2.

Jatketaan laskua:

$$(x-1)^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = -4 = (-1)\cdot 2^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x-1 = \pm\sqrt{-4}$$

$$= \pm\sqrt{(-1)\,2^2} = \pm 2\sqrt{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 \pm 2\bar{i}$$

jossa $\bar{i} := \sqrt{-1}$

kaksoispiste on määrittelyn merkki

Onko $\sqrt{-1}$:llä tulkinta?

جـ) [illegible] [illegible]
بين [illegible] [illegible]
[illegible]

[illegible]

الامثلة: [illegible]
[illegible] $[0,1)$ [illegible]
[illegible] [illegible]
[illegible]

$(0.0100100\ldots)$

الامثلة: [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible]

$x_1, x_2, x_3, \ldots$

$x_1 = \boxed{0}\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0$

$x_2 = 0\ \boxed{0}\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1$

$x_3 = 0\ 1\ \boxed{0}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1$

[illegible] $x = 0\ 0\ 0 \ldots$
[illegible] [illegible]

Jos $\hat{x}$:n bitit vaihdetaan keskenään (komplementoidaan) saadaan reaaliluku joka ei kuulu jonoon!

Cantorin diagonalisointi argumentti:

Reaalilukujen joukko ei ole numeroituva

Luonnollisten lukujen parit

	1	2	3	4	5	...
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	.	
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	...		
3	(3,1)	...				
4	⋮					
5	⋮					
⋮	⋮					

voidaan parit muodostaa

algoritmisesti luonnollisten lukujen tapauksessa.

Reaalilukuille ei mahdollista, koska ko. taulukko on mahdoton rakentaa ilman numerointia.

Tästä lähtien hyväksytään kritiikittä, että reaalilukuparien joukko

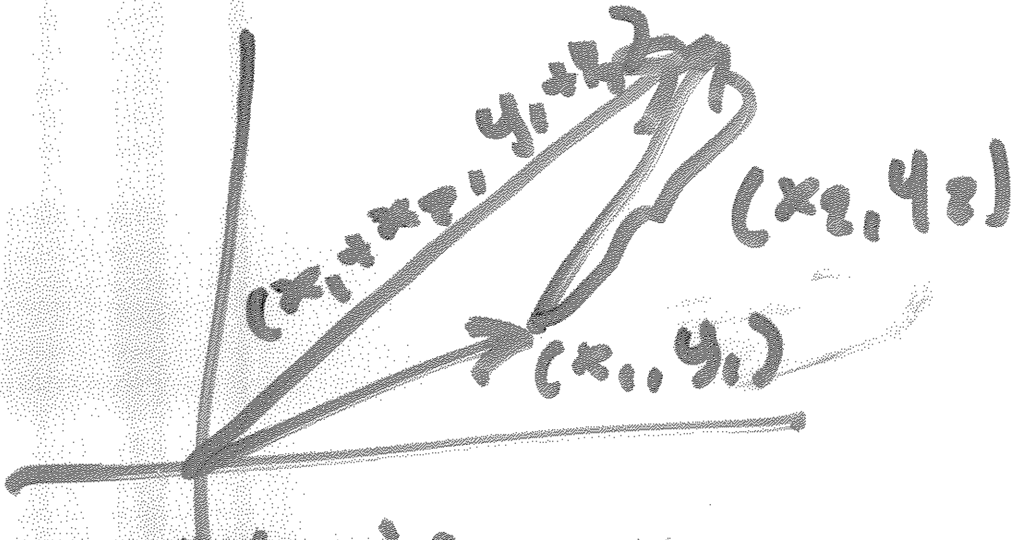
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

on ristiriidattomasti määritelty.

Määritellään summa ja tulo reaalilukupareille:

summa:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$
$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$



vektorisumma

ja tulo:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2)$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Näin voidaan määritellä.

Tällä tavalla olemme rakentaneet kompleksi-lukut, koska jos

$$z := (x, y)$$

Tällöin kutsutaan lukua

- x luvun z <u>Reaaliosaksi</u> $x = \mathrm{Re}\, z$

ja lukua

- y luvun z <u>Imaginääriosaksi</u> $y = \mathrm{Im}\, z$.

Määritellään

$$\bar{i} := (0, 1).$$

Paljonko on $\bar{i} \cdot \bar{i}$ laskettuna yllä määrit.

tulolla?

$$(0,1)^2 = (0,1)\cdot(0,1)$$

$$= (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) \quad (*)$$

$$= (-1, 0)$$

Samaistetaan lukuparit l. kompleksiluvut muotoa $(x,0)$ reaalilukujen $x \in \mathbb{R}$ kanssa. Tällöin yllä oleva lasku $(*)$ antaa

$$i^2 = -1.$$

Tästä lähtien unohdetaan lukuparinotaatio ja kirjoitetaan

$$z = (x,y) \equiv x + yi$$

sen perusteella että

$$(x,y) = (x,0) + (0,y)$$

$$= \underbrace{x(1,0)} + y\underbrace{(0,1)}_{i}$$

$$\equiv x + y\,i$$

Koko kompleksilukujen tulon rakenne on upotettu reaalilukujen laskulakeihin, ja faktaan

$$i^2 = -1.$$

Esim!

$$(2+3i)(4+5i)$$

$$= 2(4+5i) + 3i(4+5i)$$

$$= 8 + 10i + 12i + 15 \cdot \underbrace{i^2}_{=-1}$$

$= (8-15) + i(10+12)$

$= -7 + 22i.$

<u>Määr:</u> Luvun $x+yi$ vastaluku on $-x-yi$

Kompleksilukujen vähentäminen on vastaluvun lisäämistä

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

Kompleksilukujen osamäärä:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 i \\ z_2 = x_2 + y_2 i \end{cases}$$

$z := \frac{z_1}{z_2}$ on se luku

jolle toteutuu $z \cdot z_2 = z_1$.

<u>Esim:</u>

$$z = \frac{1-3i}{1+2i} = a + bi$$

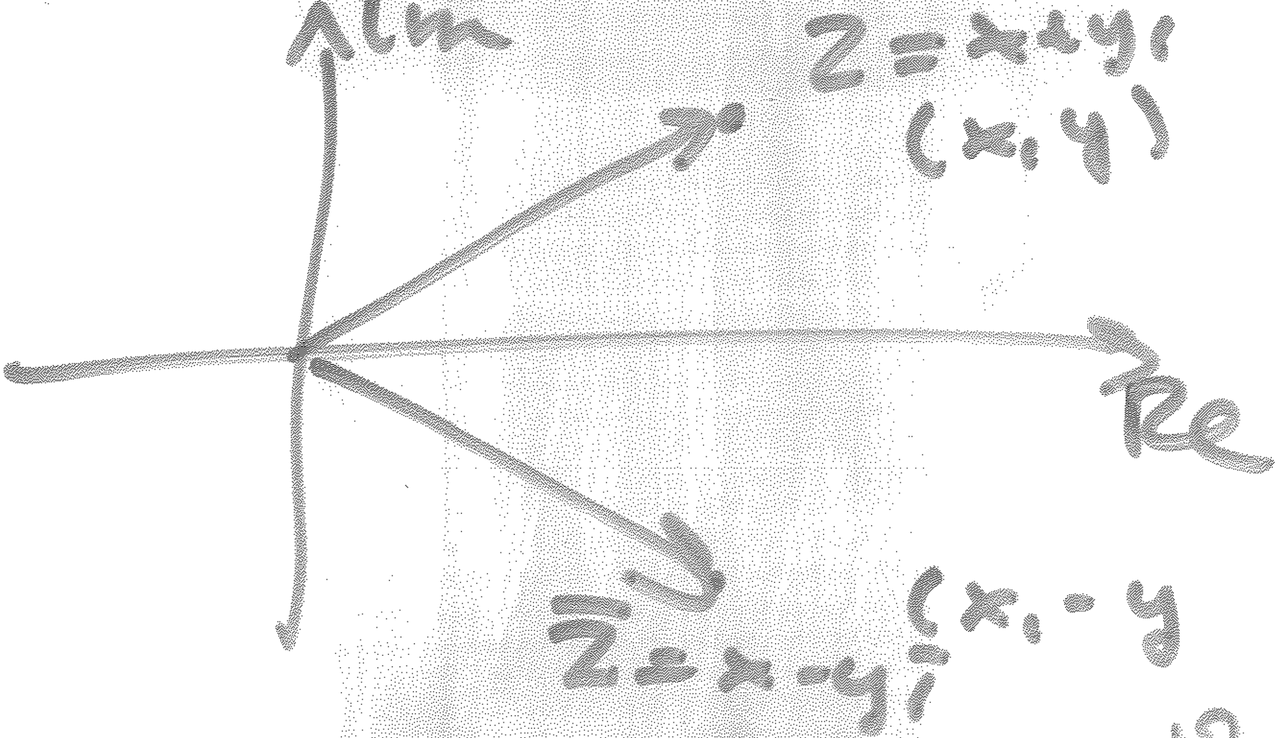
Etsi a ja b!

<u>Määr:</u> Kompleksiluvun z <u>liittoluku</u> l. <u>konjugaattiluku</u> on

$$\bar{z} := x - yi$$

mikäli $z = x + yi$.

<u>Geometrisesti:</u>



Palataan esimerkkiin:

$$\frac{1-3i}{1+2i} = \frac{1-3i}{1+2i} \cdot \underbrace{\frac{1-2i}{1-2i}}_{=1}$$

$$= \frac{1-3i-2i-6}{1+\underbrace{2i-2i}_{=0\,!!!}+4}$$

$$= \frac{-5-5i}{5} = -\frac{5}{5}-\frac{5i}{5}$$

$$= -1-i \quad ; \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-1. \end{cases}$$

<u>Yleisemmin:</u>

$$z = x+yi$$
$$\bar{z} = x-yi$$

$$\bar{z}z = (x\cancel{+}yi)(x+yi)$$

$$= x^2 + y^2 + \underbrace{(xyi - yxi)}_{=0}$$

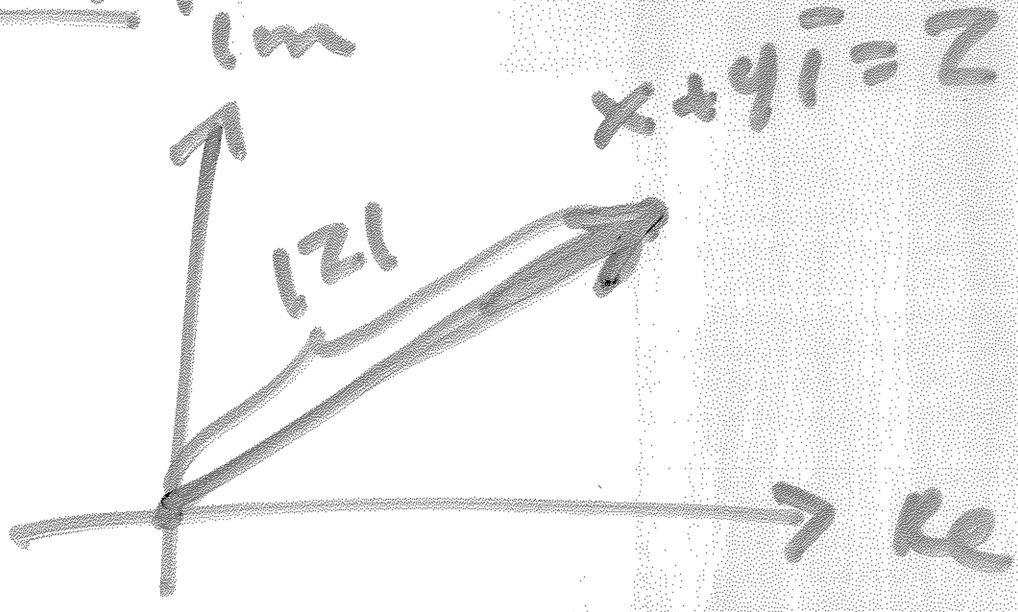
$$= x^2 + y^2 =: |z|^2$$

Jossa

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

on kompleksiluvun $z = x + yi$ moduli eli itseisarvo eli

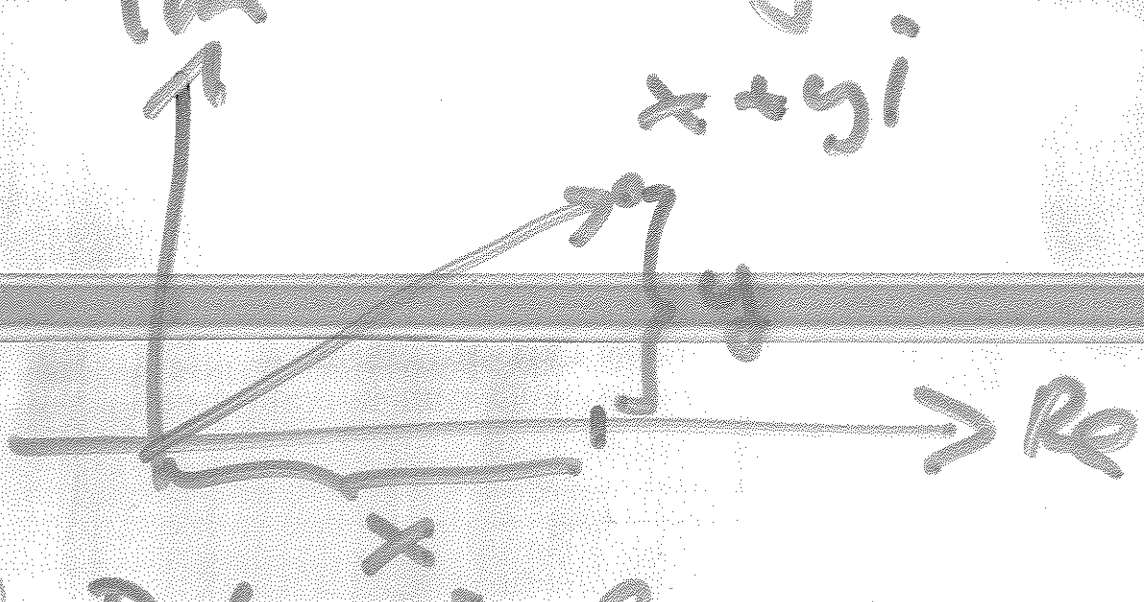
Pituus



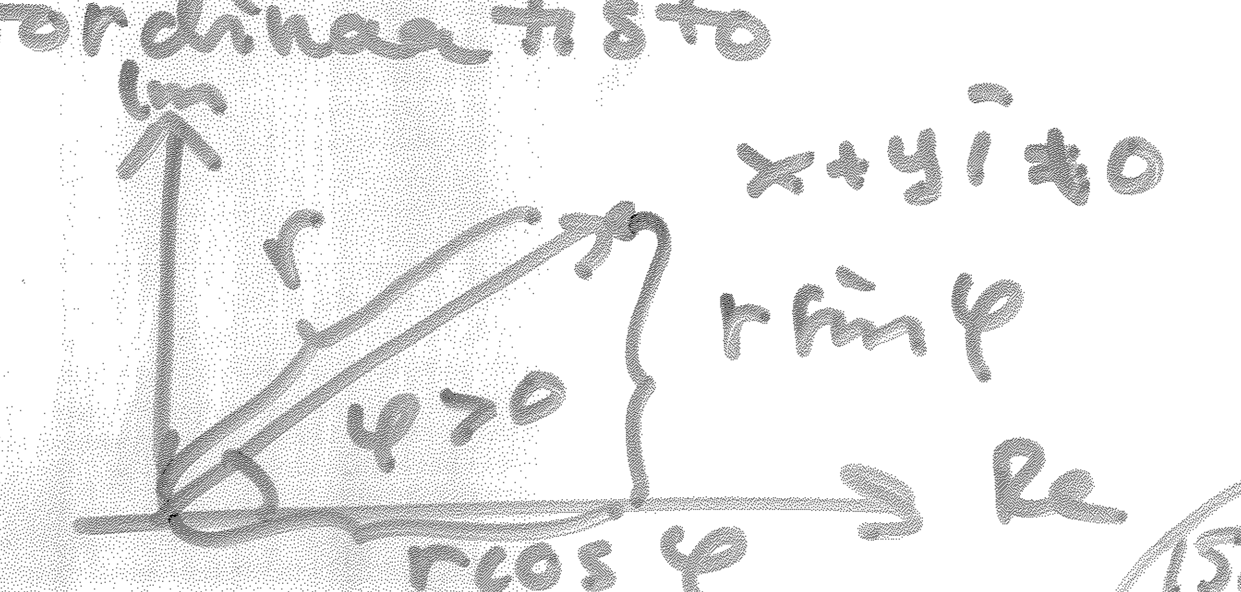
Kompleksilukujen polaarimuoto

Kompleksilukujen geom. tulkinta 2. eri tavalla

1 Karteesinen koordinaatisto



2 Polaari l. napa-koordinaatisto



Siten

$$x+yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

jossa $r = \sqrt{x^2+y^2}$

ja

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \tan\varphi$$

Sovitaan että

$$-\pi < \varphi \leq \pi$$

<u>Määr</u>: Yllä annettua kulmaa φ kutsutaan kompleksiluvun $x+yi$ <u>argumentiksi</u>.

Kolmioepäyhtälö

$Z_1 = x_1 + y_1 i$

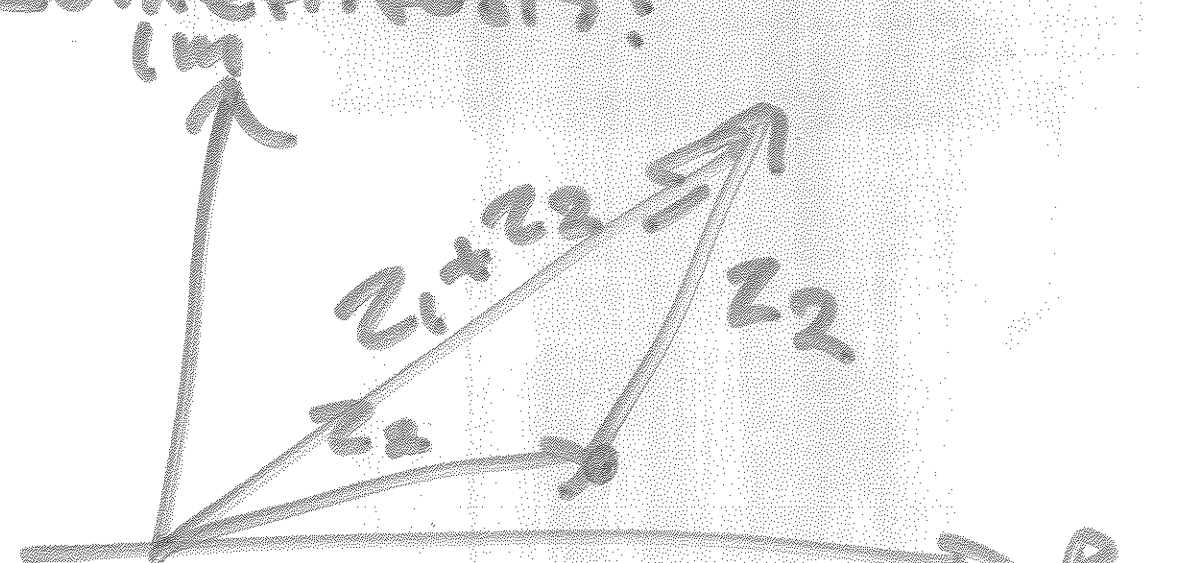
$Z_2 = x_2 + y_2 i$

niin tällöin

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Tämä voidaan osoittaa Pythagoraan lauseella.

Geometrisesti:



Ts. Suoraan menemällä on lyhin tie. 170