Perusteluu kaavalle 7.12.2006.

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\,\mathcal{L}[f](s) - f(0):$$

$$\int_0^M f'(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \Big/_0^M f(t) e^{-st} - \int_0^M (-s) e^{-st} f(t)\, dt$$

Osittais-
integr.:
$$\begin{cases} U = e^{-st} \\ dU = -s e^{-st}\, dt \\ dV = f'(t)\, dt \\ V = f(t) \end{cases}$$

$$= \underbrace{\Big/_0^M f(t) e^{-st}}_{\underbrace{f(M)e^{-sM}}_{\to 0 \text{ kun } M \to \infty} - f(0)} + s \int_0^M f(t) e^{-st}\, dt$$

(jos $s > M_f$)

Ottamalla raja-arvo $h \to 0$ saadaan yhtälön oikealle puolelle

$$-f(0) + \mathcal{L}[f](s)$$

Esim:
$$\mathcal{L}[\sin](s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}[\cos](s) = \mathcal{L}[\sin'](s)$$

$$= s\underbrace{\mathcal{L}[\sin](s)}_{1/s^2+1} - \underbrace{\sin(0)}_{=0}$$

$$= \frac{s}{s^2+1}.$$

Voidaan laskea myös $\mathcal{L}[f^{(n)}]$ jos $\mathcal{L}[f]$ tunnetaan ja tiedetään, että funktiot $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ ovat Laplace-muunnettavia.

Esim: $f(t) = \sin(e^{t^2})$

Jatkuva funktio; $|f(t)| \leq 1$ joten $M_f = 0$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}[f]$ on olemassa

Toisaalta

$$f'(t) = \cos(e^{t^2}) \cdot \frac{d}{dt} e^{t^2}$$

$$= \cos(e^{t^2}) \cdot 2t \cdot \underbrace{e^{t^2}}_{\text{vaarallinen!}}$$

Tätä ei voida "sammuttaa" kertomalla funktiolla e^{-st} jossa $s > 0$ oli äärellinen.

Oletetaanpa että f, f', f'' ovat Laplace-muunnettavia:

$$\mathcal{L}[f''](s)$$

$$= s\,\mathcal{L}[f'](s) - f'(0)$$

$$= s\left(s\,\mathcal{L}[f](s) - f(0)\right) - f'(0)$$

$$= s^2\,\mathcal{L}[f](s) - s f(0) - f'(0)$$

Samalla logiikalla:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0).$$

<u>Lause:</u> Olkoon $f(t)$ j-va, Laplace-muunnos. Määritellään

$$F(t) = \int_0^t f(v)\,dv$$

(jolloin $F(0) = 0$.)

Tällöin: $F(t)$ on Laplace-muunnos ja

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$$

<u>Perustelu:</u> Integraalilaskun (analyysin) peruslause sanoo: $F'(t) = f(t)$.

Nyt

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[F'](s)$$

Edellisen lauseen

$$= s\,\mathcal{L}[F](s) - \underbrace{F(0)}_{=0}$$

siis

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$$

kunhan $s > 0$ on riittävän lähellä $+\infty$. ∎

<u>Vakiokertoimisten lineaaristen DY:n ratkaisu Laplace-muunnoksella</u>

Vähemmän ylemmän tekniikka kuin aikatason analyysi (vakioiden variointi, Ansatzit...), koska edellyttää <u>kaikkien</u> yhtälössä esiintyvien termien (mm. ratkaisun, kuormatermin) Laplace-muunnosta.

<u>Esim:</u> Alkuarvotehtävä:

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = \sin t, \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Laplace-muunnetaan yhtälö molemmin puolin:

$$\mathcal{L}[x''] = s^2 \hat{x}(s) - s x(0) - x'(0)$$

$$= s^2 \hat{x}(s) - s x_0 - v_0$$

jossa $\hat{x}(s) \equiv \mathcal{L}[x](s)$.

$$\mathcal{L}[x''(t) + 4x(t) - \sin t](s)$$

$$= \mathcal{L}[x''](s) + 4\hat{x}(s) - \mathcal{L}[\sin t](s)$$

$$= s^2 \hat{x}(s) - s x_0 - v_0 + 4\hat{x}(s) - \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}[0](s) = 0.$$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä $\hat{x}(s)$:

$$\hat{x}(s) = \overbrace{\frac{s x_0 + v_0}{s^2+4}}^{(i)} + \underbrace{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}}_{(ii)}.$$

Jotta saamme selville mitä $x(t)$ on, tulee tehdä "käänteis-Laplace-muunnos".

Etsitään ensin funktio, jonka Laplace-muunnos on termi (i):

$$\frac{s x_0 + v_0}{s^2+4}$$

$$= x_0 \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{v_0}{2} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

$$= x_0 \mathcal{L}[\cos 2t](s) + \dots$$

$$\dots + \frac{v_0}{2}\mathcal{L}[\sin 2t](s)$$

$$= \mathcal{L}\Big[\underbrace{x_0 \cos 2t + \frac{v_0}{2}\sin 2t}_{\text{Homogeenisen yhtälön ratkaisu}}\Big](s).$$

Termi (ii) on vaikeampi:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} \overset{?}{=} \frac{A}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+4} \quad \forall x$$

(Osamurtokehitelmän Ansatz kuten rationaalifunktion integraalilaskun yhteydessä!)

$$\Leftrightarrow \quad A(s^2+4) + B(s^2+1) \overset{\forall s}{=} 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(A+B)}_{=0} s^2 + \underbrace{(4A+B)}_{=1} = 1$$

$$\begin{cases} A = -B \\ 3A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1/3 \\ B = -1/3. \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{s^2+4}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

$$= \frac{1}{3} \mathcal{L}[\sin t](s) - \frac{1}{6} \mathcal{L}[\sin 2t](s)$$

$$= \mathcal{L}\left[\frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t\right](s).$$

Siis, yhdistämällä kohdat (I) ja (I') todetaan, että:

$$X(s) = \mathcal{L}\Big[x_0 \cos 2t + \frac{v_0}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t\Big](s)$$

$$= \mathcal{L}\Big[x_0 \cos 2t + \Big(\frac{v_0}{2} - \frac{1}{6}\Big) \sin 2t + \frac{1}{3} \sin t\Big](s)$$

Laplace-muunnos on <u>injektiivinen</u> (one-to-one) jatkuville funktioille.

Ratkaisu $x(t)$ on jatkuva (jopa $2\times$ jatkuvasti derivoituva)

toisaalta funktio

$$\phi(t) = x_0 \cos 2t + \Big(\frac{v_0}{2} - \frac{1}{6}\Big) \sin 2t + \frac{1}{3} \sin t$$

on jatkuva.

Siis koska $\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[\phi]$,
niin seuraa:

$$x(t) = \phi(t) \quad \forall t \geq 0.$$

<u>Huom:</u>

$$\bar{x}'(t) = A\,\bar{x}(t) + \bar{F}(t)$$

Jossa A on $n \times n$-matriisi, niin sama tekniikka toimii:

$$s\,\hat{\bar{x}}(s) - \bar{x}(0) = A\,\hat{\bar{x}}(s) + \hat{\bar{F}}(s)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(sI - A)\,\hat{\bar{x}}(s) = \bar{x}(0) + F$$