5.12.2006.

Laplace-muunnos

Määr: Funktio $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$
on Laplace-muuntuva
jos
(i) f on paloittain
jatkuva;

(ii) $\lim_{t \to +\infty} e^{-st} f(t) = 0$
eräällä $s > 0$.

Esim:

$$f(t) = e^{t^2}, \quad t > 0.$$

$$\lim_{t \to \infty} e^{-st} e^{t^2} = \lim_{t \to \infty} e^{(t-s)t} = \infty$$

kaikilla $s > 0$. Siis
f ei ole Laplace-muuntuva.
Ehto (ii) kyllä rikkoutuu.

Huom: Ehtoa (i) voidaan relaksoida: esim. vaaditaan vaan että f on jokaiselle raj. ja suljetulle $\mathbb{R}_+$:n osavälille Riemann-integroituva $\Rightarrow$ teknillistä matem. ongelmia.

Määr: Laplace-muunnetun funktion $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ **kasvuraja** on luku

$$M_f = \inf \underbrace{\{ s \geq 0 : \lim_{t \to \infty} e^{-st} f(t) = 0 \}}_{\substack{\in \mathbb{R} \text{ ja} \\ \text{ei-tyhjä jos } f \text{ on} \\ \text{Laplace-muunnettu}}}$$

jossa inf. tarkoittaa joukon suurinta alarajaa.

Laplace-muunnos määrit. eräänä epä-oleellisena integraalina muotoa

$$\int_0^\infty g(t)\,dt := \lim_{M\to\infty} \int_0^M g(t)\,dt$$

[Integraalia kutsutaan epä-oleelliseksi siksi, että se ei ole Riemann-integraali, joka voitiin määritellä vain äärellisille integroimisväleille $[a,b]$.]

Määr: Olkoon $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ Laplace-muuntuva. Tällöin f:n Laplace-muunnos $\hat{f}$ on funktio

$$\hat{f} : (M_f, \infty) \to \mathbb{C}$$

joka tulee epäoleellisesta integraalista

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\left(:= \lim_{M \to \infty} \int_0^M e^{-st} f(t)\,dt\right)$$

kaikille $s > M_f$.

<u>Huom:</u> Ehto $s > M_f$ on tarpeen, koska tällöin

$$|e^{-st} f(t)| \overset{M_f < s_0 < s}{=} e^{-\overbrace{(s-s_0)}^{>0} t} \cdot \underbrace{\overbrace{\boxed{|e^{-s_0 t} f(t)|}}^{\leq M_1 < \infty}}_{\text{siis rajoitettu funktio.}}$$

$$\leq M_1 e^{-(s-s_0)t} \to 0$$

Siis

$$|e^{-st} f(t)| \le \underbrace{M e^{-(s-s_0)t}}_{\to 0}$$

eksponentiaalisesti vaimenten kun $t \to \infty$.

Tästä seuraa, että raja-arvon "häntä"

$$\left|\int_M^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right|$$

$$\left(= \left|\int_0^M e^{-st} f(t)\,dt - \hat{f}(s)\right| \right)$$

$$\le M_1 \int_M^\infty e^{-\overbrace{(s-s_0)}^{>0}t}\,dt$$

$$= -M_1 \Big/_M^\infty \frac{1}{s-s_0} e^{-\overbrace{(s-s_0)}^{>0}t}$$

$$= M_1 \cdot \frac{1}{s-s_0} e^{-(s-s_0)M} \xrightarrow[\infty]{} 0$$

Tällä perustuloksella todetaan että raja-arvo

$$\lim_{M \to \infty} \int_0^M e^{-st} f(t)\,dt$$

on äärellinen, jos $f(t)$ on Laplace-muunnettava.

<u>Ts.</u> Laplace-muunnoksen määrittelevä epäoleellinen integraali suppenee.

<u>Notaatiosta:</u> f:n Lapl. muunnosta merkitään joko $\hat{f}(s)$ tai $\mathcal{L}[f] = \hat{f}$. Laplace-muunnoksen arvot pisteessä $s > \alpha_f$ merkitään esim.

$$\hat{f}(s), \quad \mathcal{L}[f](s).$$

- Muuttuja s on ns. taajuustason muuttuja; puhutaan myös ns. s-tasosta.
- Muuttuja t on aikatason muuttuja. (frequency vs. time domain.)

- $\mathcal{L}$ on Laplace-muunnosoperaattori, joka kuvaa
$$f \longmapsto \mathcal{L}[f] = \hat{f}.$$

Lause: Laplace-muunnosoperaattori $\mathcal{L}$ on lineaarinen kuvaus: $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g: [M, \infty) \to \mathbb{C}$ Laplace-muuntuvia, niin
$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g].$$

Perustelu: Olkoon $s > M_f, M_g$.

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s)$$

$$= \lim_{M \to \infty} \int_0^M [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-st} dt$$

Riemann-int. laskulait

$$= \lim_{M \to \infty} \left[\alpha \int_0^M f(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^M g(t) e^{-st} dt \right]$$

limitin laskusäännöt

$$= \alpha \lim_{M \to \infty} \int_0^M f(t) e^{-st} dt + \beta \lim_{M \to \infty} \int_0^M g(t) e^{-st} dt$$

$$= \alpha \mathcal{L}[f](s) + \beta \mathcal{L}[g](s).$$

■

Huom! Näillä merkinnöillä s on positiivinen reaaliluku; $s > \alpha_f$.
Usein s nähdään kuitenkin kompleksilukuna joka toteuttaa $\mathrm{Re}\, s > \alpha_f$.

Huom: Annetulle Laplace-muunnettavalle funktiolle f kasvurajan α_f tarkka määrääminen voi olla hyvin vaikeaa. Laskujen kannalta α_f:n tarkalla arvolla ei ole väliä; riittää kunhan lasketaan "riittävän lähellä $+\infty$".

__Esim:__ Funktio $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$ on Laplace-muuntuva.

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^m e^{(a-s)t}\, dt$$

$$= \lim_{m\to\infty} \Big/_0^m \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{a-s}\right)\left(e^{(a-s)m} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{a-s} \lim_{m\to\infty} \left(e^{\overbrace{(a-s)}^{<0} m} - 1\right).$$

kun s on riittävän iso (tässä tapauksessa $s > a$), niin ~~Fermaa~~

$$\lim_{m\to\infty} e^{(a-s)m} = 0$$

siis saadaan kaikille
$s > a$ ($a \geq M_f$!)

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}.$$

siis kun $s > a$

$$\mathcal{L}[e^{at}](s)$$

$$= \frac{1}{s-a}. \blacksquare$$

Esim: $f(t) = \sin t$.
Rajoitettu $\Rightarrow$ Laplace-muunnos

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin t\, dt$$

voidaan (asken 2 krt. osittaisintegroimalla

110

muista yhtä hyvin Eulerin kaavoista

$$\begin{cases} \sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \\ \cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \end{cases}$$

Nyt

$$\int_0^\infty e^{-st} \sin t \, dt =$$

$$\frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-st} \left(e^{it} - e^{-it}\right) dt$$

(*)

$$= \frac{1}{2i} \int_0^\infty \left[e^{(i-s)t} - e^{(-i-s)t} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\Big/_0^\infty \frac{e^{(i-s)t}}{i-s} - \frac{e^{(-i-s)t}}{-i-s} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \Big/_0^\infty \left[\frac{e^{(i-s)t}}{i-s} + \frac{e^{-(i+s)t}}{i+s} \right]$$

Tarvitsemme jostain raja-arvot

$$\lim_{M\to\infty} e^{-(s\pm i)M}$$

jossa $s>0$. Kurssus-periaatteella:

$$\left|e^{-(s\pm i)M}\right|$$

$$= e^{-\mathrm{Re}[(s\pm i)M]}$$

$$= e^{-sM} \to 0 \text{ kun}$$

$M\to+\infty$ (koska $s>0$)

Näin saadaan jatketaan laskua (*)

$$= \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{i-s} - \frac{1}{i+s}\right)$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i-s} + \frac{1}{i+s}\right)$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(\frac{i+s+i-s}{-s^2-1}\right)$$ pätee.

$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{2i}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Siis

$$\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad s>0.$$

<u>Esim:</u> $f(t) = \cos t$.

Käytetään kaavaa

$$\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right).$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\cos t\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\sin\Big(\overbrace{\frac{\pi}{2}-t}^{v}\Big)\,dt$$

MV: $\begin{cases} v = \frac{\pi}{2}-t \\ dv = -dt \end{cases}$

$$= -\int_{\pi/2}^{-\infty} e^{-s(\frac{\pi}{2}-v)} \sin v \, dv$$

$$= e^{-\frac{s\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\pi/2} e^{sv} \sin v \, dv$$

$u = -v$

$du = -dv$

$$= -e^{-\frac{s\pi}{2}} \int_{\infty}^{-\pi/2} e^{-su} \sin u \, du$$

$$= e^{s\pi/2} \int_{\pi/2}^{\infty} e^{-su} \sin u \, du$$

Tämä voidaan laskea siis Laplace-muunnoksen avulla, tuloksena tulee

$$\mathcal{L}[\cos t](s) = \frac{s}{s^2+1}$$

kun $s > 0$.

Esim: Askelfunktio

$$\chi_{[0,a]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,a] \\ 0, & t > a. \end{cases}$$

$$\widehat{\chi_{[0,a]}}(s) = \int_0^\infty \chi_{[0,a]}(t) e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}\,dt$$

$$= \Big/_0^a \frac{e^{-st}}{-s} =$$

$$= -\frac{1}{s}\left(e^{-as} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 - e^{-as}\right).$$

Lause: Laplace-muunnosoperaattori $\mathcal{L}$ rajoitettuna joukkoon $C(\mathbb{R}_+)$ on injektiivinen; ts.

Jos $f \in C(\mathbb{R}_+)$ toteuttaa

$$\mathcal{L}[f](s) = 0$$

$\forall s > M_f$ niin tällöin

$f(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq 0.$

Todistus: on vaikea ja sivuutetaan.

Tämän lauseen merkitys on siinä, että voidaan puhua käänteis-Laplace-muunnoksesta.

Lause: Olkoon f Laplace-muunnettava; $a > 0$.

$$f_a(t) := f(at).$$

Tällöin

$$\mathcal{L}[f_a](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right).$$

Perustelu:

$$\hat{f}_a(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_a(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} f(at)\,dt$$

$$\text{MU:} \begin{cases} v = at \\ dv = a\,dt \end{cases}$$

$$= \int_0^\infty e^{-s\cdot\frac{v}{a}} f(v) \cdot \frac{dv}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{a}\right)v} f(v)\,dv$$

$$= \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right). \qquad \blacksquare.$$

<u>Seuraus:</u>

- $\mathcal{L}[\sin at](s)$

$$= \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$$

- $\mathcal{L}[\cos at](s)$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{(s/a)}{(s/a)^2+1}$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0.$$

Lause: Jos f ja f' ovat Laplace-muunnettavia

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\,\mathcal{L}[f](s) - f(0)$$

Perustelu seuraavalla menetelmällä.