30.11.2006

Rationaalifunktioiden integraalit I: osamurtolukukehitelmät

Rationaalifunktio on kahden reaalikertoimisen polynomin P(x), Q(x) osamäärä

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

jossa voidaan olettaa että P(x):llä ja Q(x):llä ei ole yhteisiä nollakohtia.

Voidaan olettaa jatkossa että $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

<u>Esim:</u>

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+1}$$

$$= \frac{x(x^2+1)+3x^2-x}{x^2+1}$$

$$= x + \frac{3x^2-x}{x^2+1}$$

$$= x + \frac{3(x^2+1)-x+3}{x^2+1}$$

$$= \underbrace{x+3}_{\text{polynomi}} - \frac{x-3}{x^2+1}$$

Integroitaessa olennainen vaikeus on siinä mitä jakojäännöstermille tehdään.

$$\int \frac{x-3}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} - 3\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - 3 \arctan x + C.$$

<u>Tapaus</u>: $\deg Q = 1$

$$\int \frac{c\,dx}{ax+b} = \frac{c}{a} \ln|ax+b| + \tilde{C}.$$

<u>Tapaus</u>: $\deg Q = 2.$

Jakolaskun jälkeen voidaan päätyä termeihin:

(i) $\dfrac{1}{ax+b}$;

(ii) $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

jossa ax^2+bx+c :lle.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Tapauksessa (ii) voidaan

neliöksi täydentämällä ja lineaarisella muuttujan vaihdolle päästyä neljään eri tapaukseen:

1. $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}$ 2. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

3. $\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2}$ 4. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

1. $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+a^2}$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$

2. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$

MV: $y = \frac{x}{a}$; $dx = a\,dy$

$= \frac{a}{a^2}\arctan y + C$

$= \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C$

3. $$\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2-a^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C$$

kunhan $x \neq \pm a$.

4. $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = ?$$

$a \neq 0$.

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

Voidaanko valita A, B s.e. tämä identtisesti yhtäsuuri kaikille $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{x^2-a^2} \overset{\forall x}{=} \frac{A(x+a)+B(x-a)}{\underbrace{(x-a)(x+a)}_{=x^2-a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1}_{0x+1} \overset{\forall x}{=} (A+B)x + Aa - Ba$$

Ansatz antaa halutun tuloksen jos ja vain jos

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Aa - Ba = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jos $\left\{ \overset{a \neq 0}{a \neq -a} \right.$ niin yhtälöllä on yksikäsitt. ratkaisu.

Tätä menetelmää kutsutaan <u>osamurtolukukehitelmäksi</u>.

$$A = -B$$

$$a(A - B) = a(\cdot 2A) = 1$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2a}.$$

$$! \quad \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a}$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

<u>Nimittäjä astetta n mutta nimittäjän nollakohdat erisuuret</u>

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \overset{\forall x}{=} \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

Oletetaan että $a_j \in \mathbb{R}$.

Tämä Ansatz itse antaa antamaan lineaarisen yhtälöryhmän muuttujille

$A_1, A_2, \dots A_n$

ja yhtälöitä on n kpl.

Esim: $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\,dx = ?$

$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

Ansatz:

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6} \overset{\forall x}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{(x-2)(x-3)} \overset{\forall x}{=} \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow x+4 \overset{\forall x}{=} (A+B)x-(3A+2B)$$

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ 3A+2B = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -6 \\ B = 7 \end{cases}$$

Huom: yksinkert. ratkaisut koska $2 \neq 3$.

Esim:

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\,dx$$

$$= -6\int \frac{dx}{x-2} + 7\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C.$$

Esim: $$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = ?$$

Nyt $x=1$ on kaksinkertainen juuri.
Ansatsin valinta vaikeampaa:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

EI ONNISTU! Kasvunopeudet kun $x \to 1$ ovat yhtälön eri puolilla eri-luokat.

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

EI ONNISTU! Ristiin-kertomalla

$$1 \overset{\forall x}{=} A(x-1)^2 + Bx$$

$$\iff 1 \overset{\forall x}{=} Ax^2 + (B-2A)x + A$$

josta yhtälöt

$$\begin{cases} A = 0 \\ B-2A = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

Kolme yhtälöä kaksi muuttujaa $\Rightarrow$ ongelmia

Direkter Ansatz:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} \overset{\forall x}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$1 \overset{\forall x}{=} A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \overset{\forall x}{=} (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A+B = 0 \\ -2A-B+C = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}.$$

Fürs $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C.$$

Laillista kunhan $x \neq 0, 1$.

<u>Lause:</u> Olkoon $P(x)$ ja $Q(x)$ reaalikertoimisia polynomeja, joilla ei ole yhteisiä nolla-kohtia ja

$$\deg P(x) < \deg Q(x).$$

(i) Tällöin $Q(x)$ voidaan esittää tulona

$$Q(x) = K(x-a_1)^{m_1} \cdot (x-a_2)^{m_2} \cdots (x-a_j)^{m_j} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{n_1} \cdot (x^2+b_2x+c_2)^{n_2} \cdot (x^2+b_kx+c_k)^{n_k}$$

Jossa luvut

$a_1 \ldots a_j$

ovat $Q(x)$:n reaaliset nollakohdat (a_i on m_i-kertainen nollakohta) ja polynomit

$$a\, x^2 + b_i x + c_i$$

ovat ilman reaalisia juuria ($b_i, c_i \in \mathbb{R}$ => juuret kompleksikonjugaattipareja).

(ii) Tällöin rationaalilauseke $\frac{P(x)}{Q(x)}$ voidaan kirjoittaa summana, joka sisältää termit

$$\frac{A_i}{x-a_i} + \frac{B_i}{(x-a_i)^2} + \ldots$$

$$+ \frac{\ddot{O}_i}{(x-a_i)^{m_i}}$$

Ja lisäksi termit

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x^2+b_1 x+c_1)} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+b_1 x+c_1)^2} + \cdots \frac{B_{n_1} x + C_{n_1}}{(x^2+b_1 x+c_1)^{n_1}}$$

(yksi kutakin polynomin kohden).

Tällöin näin muodostetulle Ansatzille saadaan laskettua yksikäsitt. kertoimet $A_i \cdots, B_i, C_i$ jn.. siten että osamurtolukukehitelmä tulee yksikäsitt. määrättyä.

Perustelu: Ohitetaan.

Esim: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3} = ?$

$Q(x) = 1+x^3 = 0$

$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

$$\underbrace{x^2 - x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2}_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} + \underbrace{\left(1-\tfrac{1}{4}\right)}_{3/4>0} = 0$$

Ansatz an mit

$$\frac{1}{x^3+1} \overset{\forall x}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$\Leftrightarrow$

$$1 = A(x^2-x+1) + (x+1)(Bx+C)$$

$\Leftrightarrow$

$$1 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C)$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 0 \\ A + C = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Siis

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \overbrace{\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1}}^{=\frac{1}{3}\ln|x+1| + C.}$$

$$- \frac{1}{3} \int \frac{x\,dx}{x^2 - x + 1}$$

$$+ \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

$$= ?$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\left[\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \int \frac{-3\,dx}{x^2-x+1}\right]$$

Tässä 1. integraali on muotoa $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$

eli $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = \ln|x^2-x+1| + C.$

Viimeinen termi

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

edellyttää neliöksi täydentämistä:

$$= \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

mu $\begin{cases} u = x - \frac{1}{2} \\ du = dx \end{cases}$

$$= \int \frac{du}{u^2 + a^2}$$

jossa $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Antaa meille arcus-tangentin kuten edellä esitty.