Lause: Jos $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio jolla $g(a) = A$, $g(b) = B$. Olkoon f jatkuva funktio g:n arvojoukossa.

Tällöin

$$u = g(x); \quad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

$$\int_a^b f(\overbrace{g(x)}) \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int_A^B f(u)\,du$$

Perustelu: Olkoon $F(t)$ funktio joka toteuttaa $F'(t) = f(t)$ $\forall t \in [A,B]$.

1.

ketjusääntö

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$$

$$= f(g(x))g'(x).$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$$

$$= \Big/_a^b F(g(x)) = F(B) - F(A)$$

integraalilaskennan (tai analyysin) peruslause

$$= \Big/_A^B F(x) = \int_A^B f(u)\,du$$

Katsomalla "päätä ja häntää" todetaan väite oikeaksi. ∎

2.

Trigonometristen funktioiden määräämättömät integraalit

Helpot:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Esim:

$$\int \sin ax \, dx$$

muuttujanvaihto

$u = ax$

$du = a\,dx$

$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{a}$

$$= \int \sin u \cdot \frac{du}{a}$$

$$= \frac{1}{a}(-\cos u + C)$$

$$= \frac{1}{a}(-\cos ax + C).$$

Esim: $\int \tan x \, dx$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

koska

$$\frac{d}{dx}\ln|\cos x| = \frac{1}{\cos x}(-\sin x)$$

$$= -\tan x$$

Sama tempun:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$= \ln|f(x)| + C$$

olipa f mikä tahansa "säädyllinen" funktio.

Esim:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \sqrt{1+x^2} + C$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2} = \frac{d}{dx}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exam:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = ?$$

$$F(x) = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right|$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{\cos x} + \tan x}$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x) + 1 + \tan^2 x\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}{\frac{1}{\cos x} + \tan x}$$

$$\cancel{\frac{\sin x + \overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1}}{\cos^2 x\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right)}}$$

$$\cancel{= \frac{\sin x + 1}{\cos x + \sin^2 x}}$$

Uusi sievennys:

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot \frac{\sin x + \overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1}}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cancel{(1 + \sin x)}}{\cancel{(1 + \sin x)} \cdot \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \quad \blacksquare$$

<u>Integraalit muotoa</u>

$$\underline{\int \sin^m x \cos^n x \, dx}$$

Jos joko m tai n on pariton, niin voidaan hajottaa integrandi seuraavalla tavalla:

Esim:

$$\int \sin^3 x \cos^8 x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x \cos^8 x \cdot \sin x \, dx$$

$(\sin^2 + \cos^2 = 1)$

parillinen potenssi

$$= \int (1-\cos^2 x) \cos^8 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int \cos^8 x \cdot \sin x \, dx - \int \cos^{10} x \cdot \sin x \, dx$$

$$= -\frac{1}{9} \cos^9 x + \frac{1}{11} \cos^{11} x$$

koska

$$\int \cos^m x \cdot \sin x \, dx$$

$$= -\frac{\cos^{m+1} x}{m+1} + C.$$

koska

$$D\,\frac{\cos^{m+1} x}{m+1}$$

$$= \frac{1}{m+1}\, D\,(\cos x)^{m+1}$$

$$= \frac{1}{m+1}\cdot (m+1)(\cos x)^{m}\cdot(-\sin x)$$

$$= -\cos^{m} x \sin x$$

Jäljelle jää tapaus, jossa sekä m että n ovat molemmat parillisia. Tällöin voidaan käyttää kaksinkertaisen ~~kulman~~ sinin ja kosinin kaavoja:

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \end{cases}$$

Esim: $\int \cos^2 x \, dx$

$= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx$

$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

Esim: $\int \sin^4 x \, dx$

$= \int (\sin^2 x)^2 \, dx$

$= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 \, dx$

$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$

$= \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \int \cos^2 2x \, dx \right)$

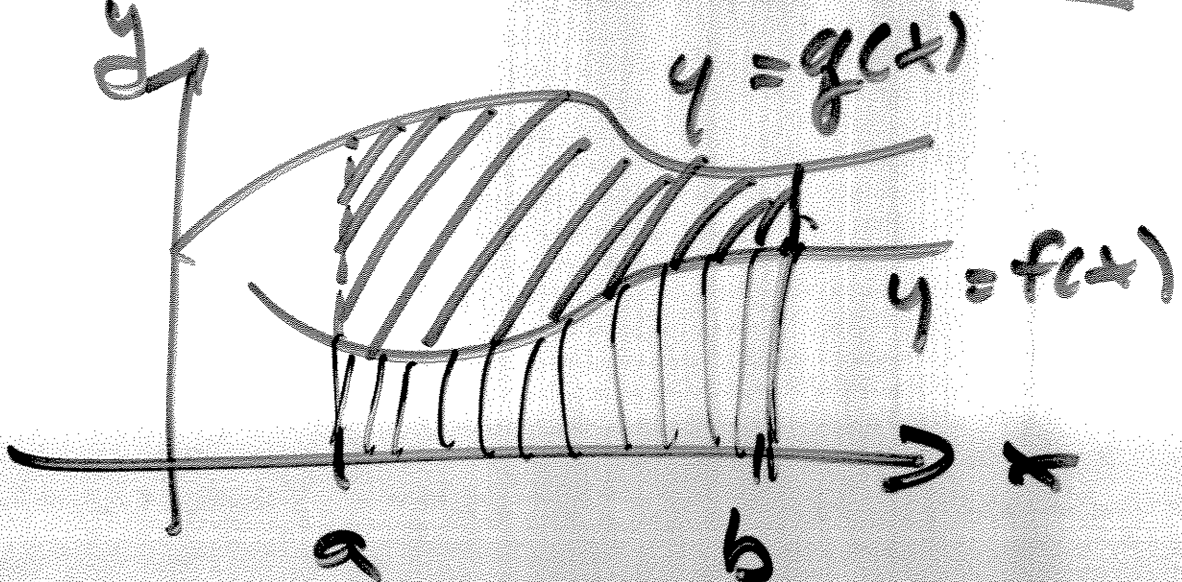
jossa

$\int \cos^2 2x \, dx \quad \begin{cases} u = 2x \\ du = 2dx \end{cases}$

$= \int \cos^2 u \, \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin 2u \right)$

$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right)$. ∎

Käyrien väliin jäävien alueiden pinta-alat



Oletetaan, että $a < b$
sekä

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Määrätyn integraalin määritelmän perusteella:

$$A_1 = \int_a^b g(x)\,dx$$

jossa A_1 on $g(x)$:n, x-akselin ja suorien $x=a$, $x=b$ rajaama ala.

Jos

$$A_2 = \int_a^b f(x)\,dx$$

niin tällöin etsitty pinta-ala

$$A = A_1 - A_2$$

$$= \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b (\underbrace{g(x) - f(x)}_{\geq 0 \ \forall x \in [a,b]})\,dx.$$

Entä jos $g(x) \geq f(x)$ ei aina päde (mutta g ja f olisivat jatkuvia funktioita).

Tällöin tulee ratkaista yhtälöstä $f(x) = g(x)$

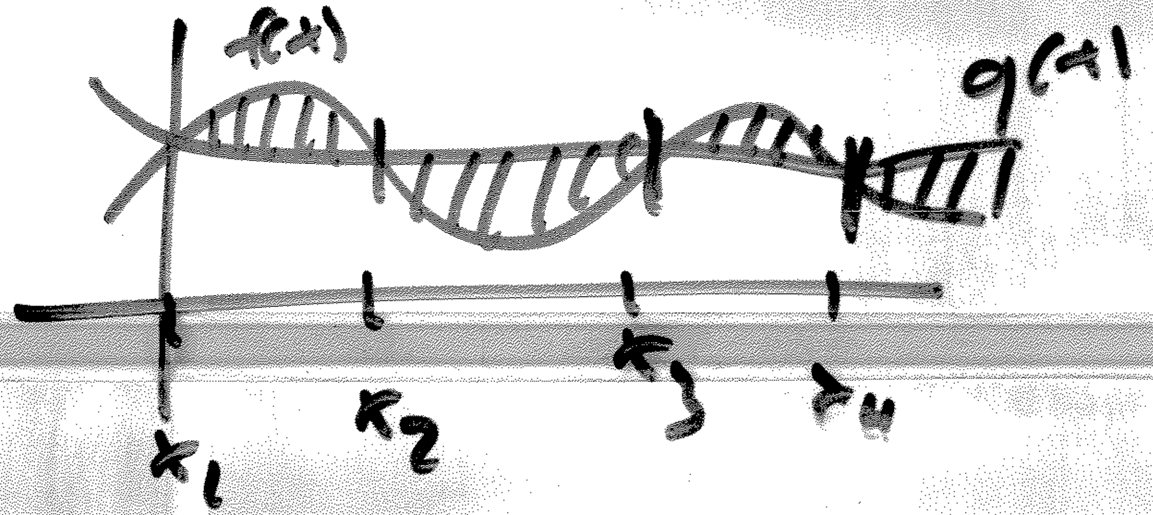
ratkaisut

$$x_1, x_2, x_3 \dots x_n$$

ja tutkia funktion

$$f(x) - g(x) =: h(x)$$

etumerkkiä kun $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots n-1$.



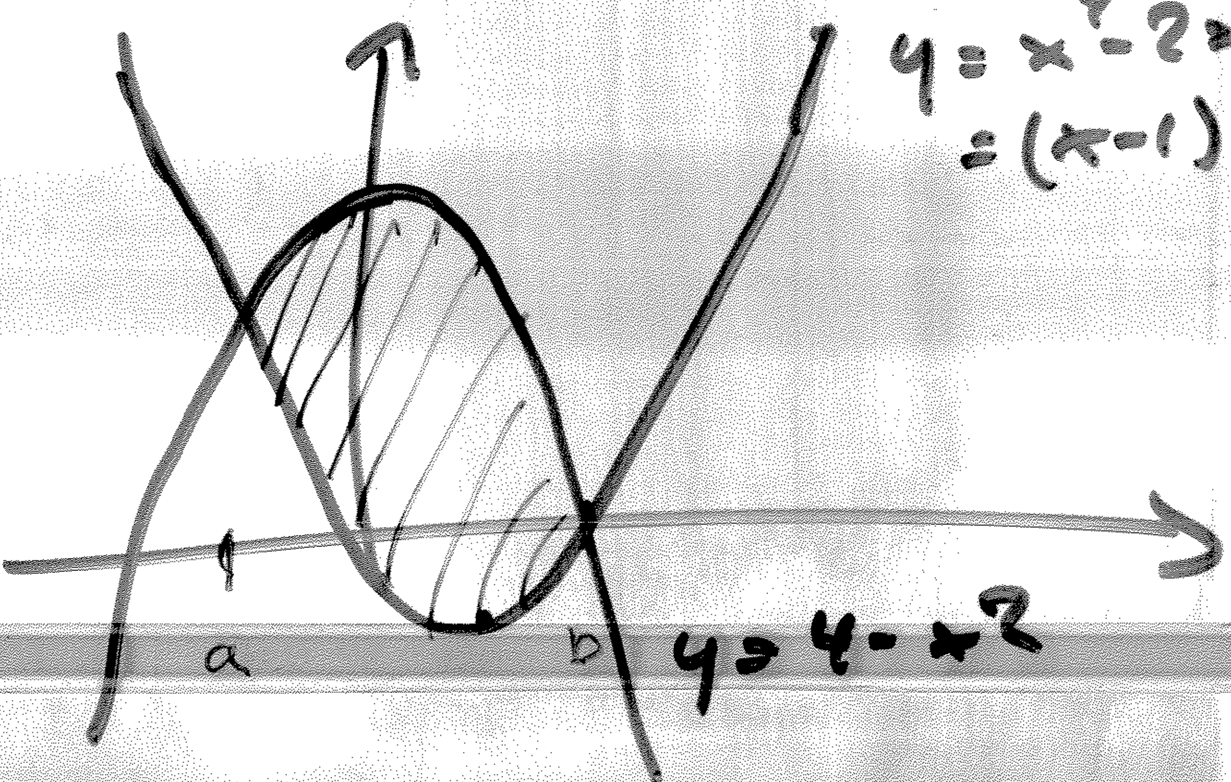
Siis halutaan laskea

$$\int_a^b \underbrace{|f(x) - g(x)|}\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Esim.: Etsi se rajoitetun pinta-ala, jota rajaavat käyrät $y = x^2 - 2x$ ja $y = 4 - x^2$.

$$y = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$



Etsitään a, b:

$$x^2 - 2x = 4 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = -1, \; b = 2.$$

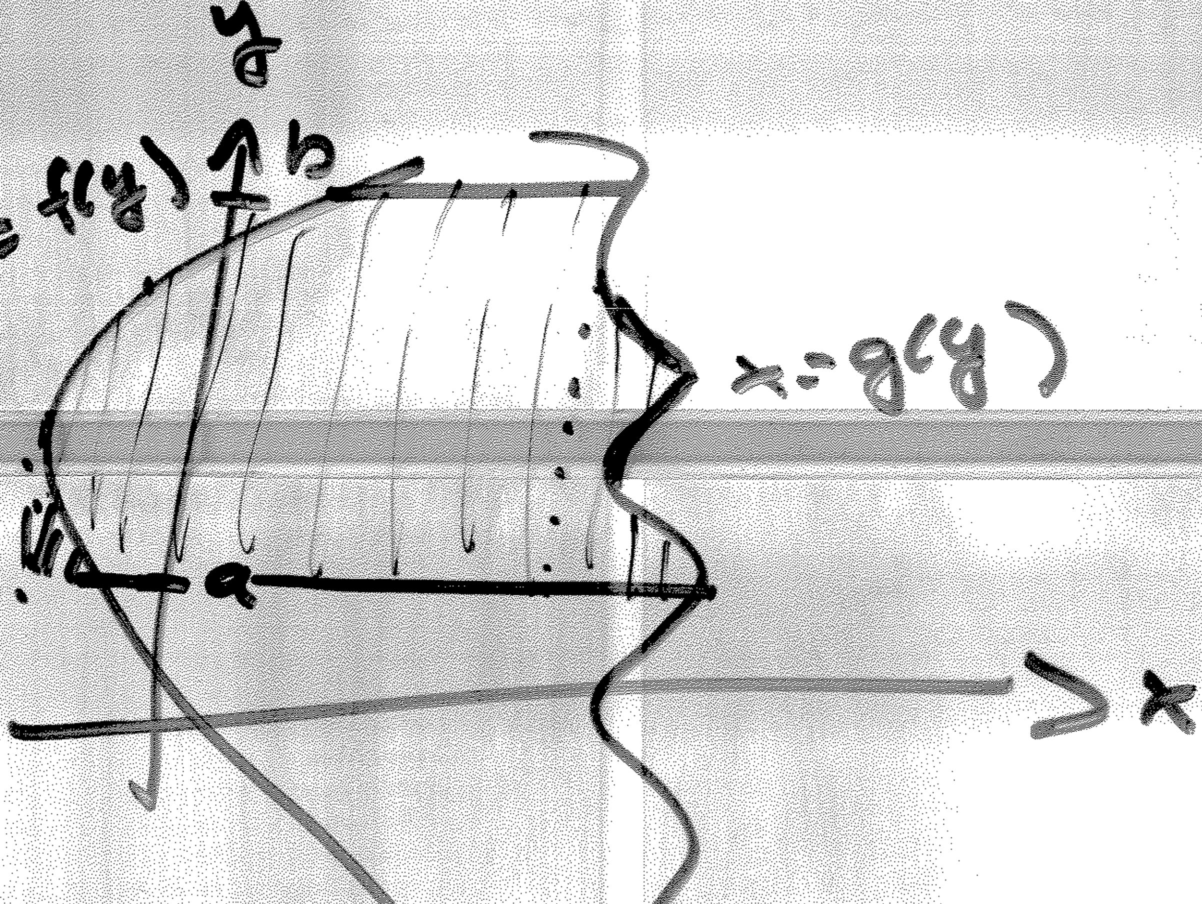
Siis

$$A = \int_{-1}^{2} \left[(4 - x^2) - (x^2 - 2x) \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,dx$$

$$= \Big/_{-1}^{2} \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right) = \ldots 9.$$

Entä sitten tapaus:



Tämän tyyppiset tehtävät kannattaa laskea integraalin

$$\int_a^b (g(y) - f(y))\,dy.$$

Osittaisintegrointi

Integrointitekniikka, joka perustuu tulon derivointisääntöön

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]$$
$$= f'(x)\,g(x) + f(x)g'(x)$$

fiksulle takaperin käyttämiselle.

Jos $U(x)$ ja $V(x)$ ovat derivoituvia, niin

$$\frac{d}{dx}\left(U(x)V(x)\right)$$
$$= U(x)\,\frac{dV}{dx}(x)$$
$$+ V(x)\,\frac{dU}{dx}(x)$$

siis

$$U(x)V(x)$$

$$= \int U(x) \frac{dV}{dx} \cdot dx$$

$$+ \int V(x) \frac{dU}{dx} dx$$

$$= \int U(x)\, dV(x)$$

$$+ \int V(x)\, dU(x)$$

joten

$$\int U(x)\, dV(x)$$

$$= U(x)V(x) - \int V(x)\, dU(x)$$

Tätä kaavaa yritetään käyttämään siten, että integraali $\int V(x)\, dU(x)$ oli helpompi laskea

$\int U(x)\, dV(x)$.

Exm: $\int x e^x dx$

Vahitaam
$$\begin{cases} U = x;\ dV = e^x dx \\ dU = dx. \\ \dfrac{dV}{dx} = e^x \\ \Rightarrow V = e^x \end{cases}$$

Ths

$$\int \overset{U}{x} \cdot \overbrace{e^x dx}^{dV}$$

$$= \overset{U}{x} \cdot \overbrace{e^x}^{V} - \int e^x \overbrace{dx}^{dU}$$

$$= x e^x - e^x + C$$

$$= (x-1) e^x + C.$$

[illegible]:

$$\int \ln x \, dx \quad \begin{cases} U = \ln x \\ dV = dx \\ dU = \dfrac{dx}{x} \\ V = x \end{cases}$$

$$\int \overbrace{\ln x}^{U} \, \overbrace{dx}^{dV}$$

$$= \overbrace{x}^{V} \overbrace{\ln x}^{U} - \int \overbrace{x}^{V} \cdot \overbrace{\frac{dx}{x}}^{dU}$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C.$$

[illegible]: $\int x^2 \sin x \, dx$

$$U = x^2 \quad dV = \sin x \, dx$$

$$dU = 2x \, dx, \quad V = -\cos x$$

[illegible]

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx =$$

$$= -x^2\cos x - \int(-\cos x)\cdot 2x\,dx$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx.$$

Tämä kannatti, koska yhtälön oikealle puolelle x esiintyi yhtä alemmassa potenssissa kuin alkuperäisessä integraalissa.

$$\int \overset{U}{x}\cdot\overbrace{\cos x\,dx}^{dV} \qquad \left\{\begin{array}{l} U = x \\ dV = \cos x\,dx \\ dU = dx \\ V = \sin x \end{array}\right.$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

Esim: $\int \arcsin x\,dx = ?$

$U = \arcsin x$

$dV = dx$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$V = x$$

$$\int \overbrace{\overline{\arcsin}\, x}^{v} \cdot \overbrace{dx}^{dv}$$

$$= x\, \overline{\arcsin}\, x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Muuttujanvaihto

$$\begin{cases} u = 1 - x^2 \\ \dfrac{du}{dx} = -2x \\ \text{ts.}\quad du = -2x\, dx \end{cases}$$

siis

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{2}\, du}{\sqrt{u}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -u^{1/2}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}$$

TS. keke integraali;

$$\int \arcsin x \, dx$$

$$= x \arcsin x - \sqrt{1-x^2}. \quad \blacksquare$$