Perustelu tänään:

Väite (i):

$$F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{t+h} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^t f(x)\,dx + \int_t^{t+h} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x)\,dx$$

Integraalilaskun väliarvolause

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h f(c)$$

jossa $c = c(h)$ toteuttaa $t < c < h+t$ tai $t+h < c < t$.

1

$$= \lim_{h \to 0} f(c) = \lim_{c \to t} f(c)$$

$$= f(t)$$

koska f jatkuva.

Pää ja häntä kertoo

$F'(t)$ on olemassa

ja lisäksi $F'(t) = f(t)$.

<u>Väite (ii)</u>.

Olkoon $G(t)$ funktio joka toteuttaa $G'(t) = f(t)$ kaikille $t \in I$.

Väite (i) sanoi että myös funktio $F(t) := \int_a^t f(x)\,dx$ toteuttaa $F'(t) = f(t)$.

Siis

$$\frac{d}{dt}\Big(G(t) - F(t) \Big) = 0 \quad \forall t$$

Väliarvolause sanoo tällöin että $G(t) - F(t) = C$

eräällä vakiolla C, kaikille $t \in I$.

(Kertaus: Olkoon $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivoituva (a,b):ssä:

Väliarvolause:

$$(*) \quad \frac{\phi(x_1) - \phi(x_2)}{x_1 - x_2} = \phi'(c)$$

jossa $c \in [x_1, x_2]$; $x_1, x_2 \in (a,b)$.

Jos toteutuu $\phi'(x) \equiv 0 \ \forall x$ niin tällöin $(*) \Rightarrow$

$$\phi(x_1) - \phi(x_2) = 0$$

kaikilla $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in (a,b)$

Ts. ϕ on vakiofunktio)

Siis

$$G(t) = F(t) + C$$

$$= \int_a^t f(x)dx + C$$

Jos asetetaan $t = a$ (30)

niin saadaan

$$g(a) = C.$$

Siis

$$(**) \quad \int_a^t f(x)\,dx = g(t) - C$$

$$= g(t) - g(a). \quad \blacksquare$$

Evaluaatio- tai sijoitus-symboli: Jos $F(x)$ on funktio ja a, b kuuluvat välille jossa $F(x)$ on määritelty, niin

$$F(x)\Big|_a^b = \Big|_a^b F(x) := F(b) - F(a).$$

Tällä notaatiolla kaava $(**)$ on muotoa

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b g(t)$$

4a

Integraalilaskennon avulla voidaan laskea paljon määrättyjä integraaleja "derivoimalla taaksepäin"

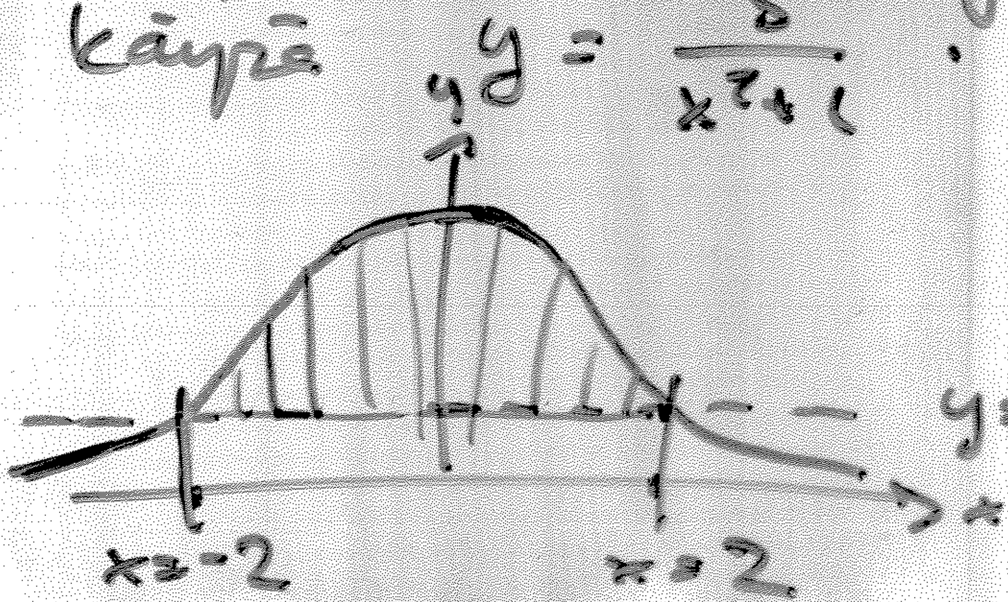
Esim:

$$\int_{-1}^{2}(x^2-3x+2)\,dx$$

$$= \Big/_{\!-1}^{\,2}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right)$$

$$= \frac{9}{2}.$$

Esim: Etsi pinta-ala alueelle jota rajaavat suora $y=1$ ja käyrä $y=\frac{5}{x^2+1}$.



$$A = \int_{-2}^{2} \left(\frac{5}{x^2+1} - 1 \right) dx$$

$$= 2 \int_{0}^{2} \left(\frac{5}{x^2+1} - 1 \right) dx$$

$$= 2 \int_{0}^{2} \frac{5\,dx}{x^2+1} - 2 \Big/_{0}^{2} x$$

$$= 2 \int_{0}^{2} \frac{5\,dx}{x^2+1} - 4.$$

Etsi jokin funktio $F(x)$ joka toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$F'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Lasketaan ensin tan-funktion derivaatta:

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

oikeasti olen kiinnostunut arkustangentin arctan derivaatasta:

$$y = \tan x$$
$$x = \tan^{-1} y.$$

jolloin

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$
$$= \frac{1}{1+y^2}.$$

siis

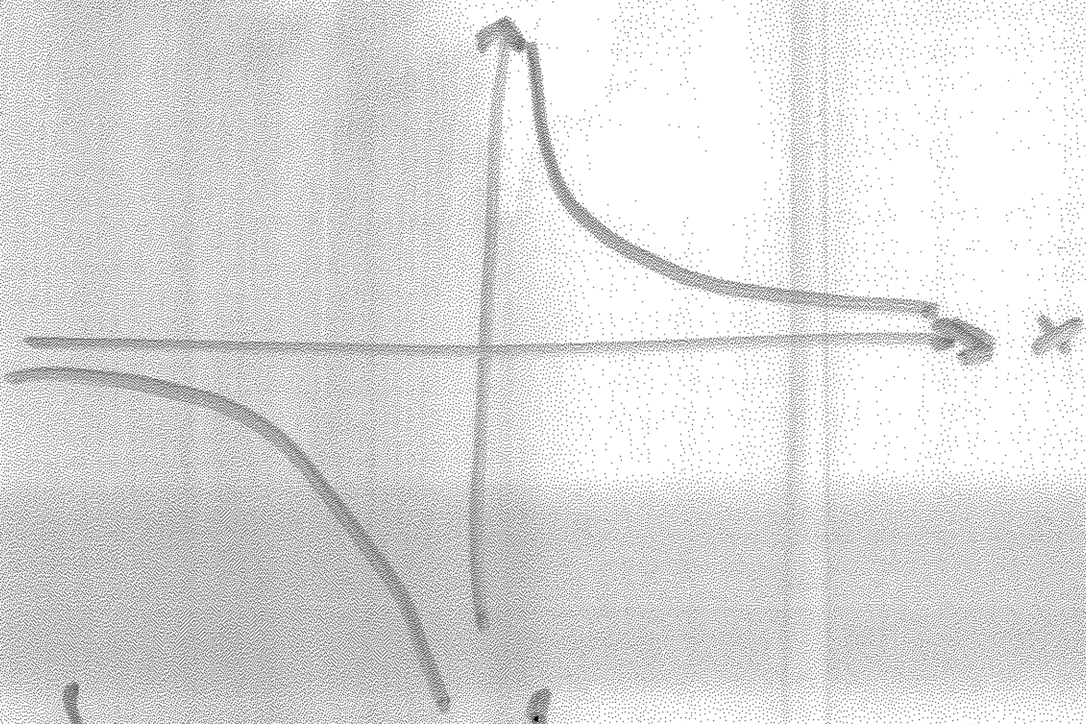
$$\frac{d \tan^{-1} x}{dx} = \frac{1}{x^2+1}.$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+1} = \Big/_0^2 \tan^{-1} x$$

$= \tan^{-1} 2$. Tästä saadaan

$A = 10 \tan^{-1} 2 - 4.$

<u>Esim:</u> $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$



$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \Big/_{-1}^{1} \ln|x|$$

$$= \ln 1 - \ln 1 = 0.$$

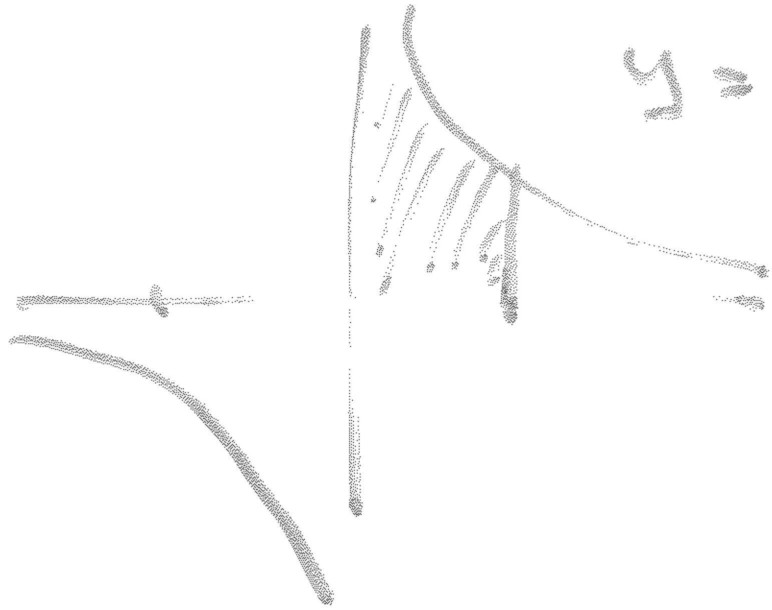
Toisaalta

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln 1 - \ln \varepsilon)$$

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0+} \ln \varepsilon = \infty.$$

Siis varjostettu pinta-ala



$y = 1/x,\ x \neq 0$

on äärettömän suuri.

Integraalilaskennan peruslauseen käyttö kohdassa (**) on laitonta, koska integrandi $\frac{1}{x}$ ei ole jatkuva välillä $[-1, 1]$ pisteen $x = 0$ takia.

Toki pinta-ala käyrän $\frac{1}{x}$ ja x-akselin välillä voidaan katsoa nollaksi kahden äärettömän erotuksena...

Esim:

$$g(x) = x^2 \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt$$

$$= x^2 F(5x)$$

jossa

$$F(y) = \int_{-4}^{y} e^{-t^2}\,dt.$$

ketjusääntö

$$\frac{dg}{dt} = 2x\,F(5x) + x^2 F'(5x)\cdot 5$$

$$= 2x\,F(5x) + 5x^2 F'(5x)$$

Nyt

$$F'(y) = e^{-y^2}$$

integraalilaskennan perus-lauseella. Siis:

$$g'(x) = 2x \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt$$

$$+ 5x^2 e^{-(5x)^2}$$

$$= 2x\int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt + 5x^2 e^{-25x^2}.$$

Esim.:

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\,dt \quad , \quad x \geq 1, \ x^3 \geq x^2$$

$$= \int_{1}^{x^3} e^{-t^2}\,dt + \int_{x^2}^{1} e^{-t^2}\,dt$$

$$= F(x^3) - F(x^2)$$

koska $\int_{x^2}^{1} e^{-t^2}\,dt = -\int_{1}^{x^2} e^{-t^2}\,dt$

Tässä

$$F(y) = \int_{1}^{y} e^{-t^2}\,dt,$$

jolla

$$F'(y) = e^{-y^2}.$$

Derivoidaan ketjusäännöllä

$$\frac{dH}{dx} = F'(x^3)\cdot 3x^2 - F'(x^2)\cdot 2x$$

110

$= 3x^2 e^{-(x^3)^2} - 2x e^{-(x^2)^2}$

$= 3x^2 e^{-x^6} - 2x e^{-x^4}$. ■

Integroimiskaavoja, jotka osataan derivoimistaulun perusteella

(i) $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

(Huom: kun integroimisrajoja ei merkitä, niin $\int f(x)\,dx$ tarkoittaa niitä funktioita $F(x)$ joilla $F'(x) = f(x)$; ts. antiderivaattoja)

(ii) $\int x^{\frac{1}{p}} \, dx$ $\quad p \in \mathbb{Z}$, $p \neq -1$

$= \frac{1}{1+\frac{1}{p}} x^{1+\frac{1}{p}}$

(iii) Poikkeustapaus edellisen

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \; ; x \neq 0.$$

(iv)

$$\int \sin ax \, dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos ax \, dx$$

$$= \frac{1}{a}\sin ax + C$$

(v)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

(vi)

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

(v)

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

Exm :

$$\int \frac{(x+1)^3}{x}\,dx$$

$$= \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x}\,dx$$

$$= \int \left(x^2+3x+3+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+\int\frac{dx}{x}+C$$

$$= \frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+\ln|x|+C$$

dosse $x \neq 0$.

Exm :

$$\int (4\cos 5x - 5\sin 3x)\,dx$$

$$= \frac{4}{5}\sin 5x + \frac{5}{3}\cos 3x + C.$$

Muuttujenvaihto -
~~tekniikka~~ l.
sijoitusmenetelmä

Derivoinnin ketjusäännön
tarkoituksen mukaiste
käyttämistä "takaperin"

f, g funktioita
joille $f(g(x))$ on
jatkuvasti käännostaulla x-

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t))\, g'(t)$$

Jos käytetään tähän funktioon integraalilaskun perus-
lausetta

$$f(g(x)) = \int_a^x \left[\frac{d}{dt}(f(g(t)))\right] dt$$

$$= \int_a^x f'(g(t))\, g'(t)\, dt$$

Tätä laskukaavaa voidaan käyttää määräämättömien integraalien laskussa:

Esim.:

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx \qquad u = x^2+1$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Leftrightarrow du = 2x\,dx$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x\,dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1|.$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

$$= \frac{x}{x^2+1} \qquad \blacksquare$$

Ehm:
$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$$

$$u = 1+e^x$$
$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x$$
$$\Leftrightarrow du = e^x\,dx$$

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$$

$$= \int \underbrace{\sqrt{1+e^x}}_{\sqrt{u}} \cdot \underbrace{e^x\,dx}_{du}$$

$$= \int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \cdot u^{1+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2}.$$

Ehm:
$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

$$\begin{pmatrix} u = x+2 \\ du = dx \end{pmatrix}$$

$$= \int \frac{du}{u^2+1} = \overline{\arctan}\, u$$

$$= \overline{\arctan}\,(x+2).$$

Lause: Oletetaan että funktio g on derivoituva välillä $[a,b]$ ja että $g(a)=A$ ja $g(b)=B$.

$$\int_a^b \overbrace{f(g(x))}^{f(u)} \underbrace{g'(x)\,dx}_{du}$$

$$= \int_A^B f(u)\,du$$

(Sijoitus $\begin{cases} u = g(x) \\ du = g'(x)\,dx \end{cases}$)

Perusteluna viittaan edellä oleviin esimerkkeihin.

Huom: Kolme asiaa muuttuu, kun tehdään integraalissa muuttujanvaihto $u = g(x)$

① $dx \to du$

② $f(g(x)) \to f(u)$

③ Integrasinnusrajat
$a, b \to g(a), g(b).$

$\approx$