22.11.2006

Esim. Määritä

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n^2}.$$

Tämä raja-arvo voidaan tulkita erään alueen pinta-alana.

Välin [0,1] tasavälinen jako n yhtä suureen osaväliin, kukin pituudeltaan $\frac{1}{n}$.

Jakopisteet ovat

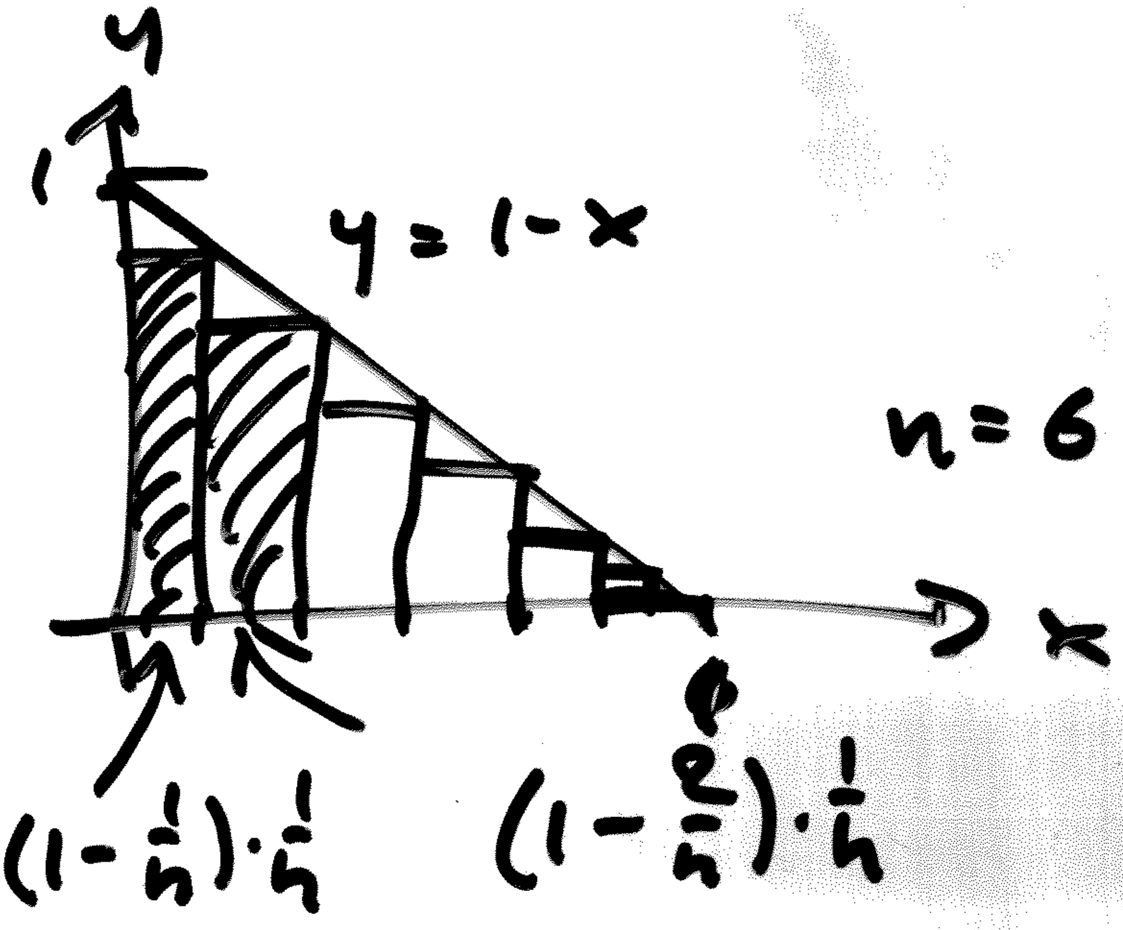
$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i=0,\dots n$$

Voidaan kirjoittaa

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(1-\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$1-\frac{i}{n} = f(x_i) \text{ jos } f(x) = 1-x$$

1a



Uskomme että yhteenlaskettu suorakait. pinta-ala lähestyy suorakulmaisen kolmion pinta-alaa

$$A = \frac{1}{2}$$

eli

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Määrätty (Riemann) integraali

Olkoon väli $[a, b]$, $a < b$. Välillä on *jako* l. *partitio*, joka on mielivaltainen joukko pisteitä $P = \{x_0, \ldots x_n\}$.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b .$$

Ei oleteta, että $x_{i+1} - x_i$ olisi i:stä riippumaton vakio. Partitiolla P on *normi*:

$$\|P\| = \max_{i=1,\ldots n} \Delta x_i$$

jossa

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} .$$

Olkoon f jatkuva funktio välillä $[a,b]$. Tällöin f on jatkuva jokaisella osavälillä $[x_{i-1}, x_i]$ $\Rightarrow$ on olemassa pisteet

$$l_i,\ u_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

siten että

$$f(l_i) \leq f(x) \leq f(u_i)$$

kaikilla $x \in [x_{i-1}, x_i]$; tämä pätee siis kaikille $i = 1, \ldots n$.

Määr: Riemannin alasumma funktiolle f partitiolla P on luku

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i .$$

4a

Riemannin yläsumma on

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,\Delta x_i$$

Jos funktion $f(x)$ ja x-akselin väliin "järjellinen" pinta-ala välille $x \in [a,b]$, niin tämä pinta-ala A toteuttaa

$$L(f,P) \leq A \leq U(f,P)$$

kaikille mahdollisille välin partitioille P.

Jos f ei ole jatkuva, saattaa tapahtua niin, että tihentämällä jakoa (siten $\|P\| \to 0$) ei välttämättä tapahdukaan niin, että

$$\lim_{\|P\|\to 0}\Big(U(f,P)-L(f,P)\Big)=0.$$

Tosiaankin

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0 & \text{kun } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Nyt jokaisen partition P jokaisella osavälillä $[x_{i-1},x_i]$ on sekä rationaalilukuja että irrationaalilukuja. Tällöin

$$\begin{cases}\min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\chi(x)=0\\[2ex] \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\chi(x)=1\end{cases}$$

joten

$L(\chi, P) = 0$, $U(\chi, P) = 1$

kaikilla partitioilla. Tihentämällä partitiota P ($\|P\| \to 0$) ei koskaan saada tätä "kläppiä" ykköstä pienemmäksi.

__Määr:__ Funktio f välillä $[a,b]$ on __Riemann-integroituva__ jos on olemassa vain __yksi__ reaaliluku I joka toteuttaa

$$L(f,P) \le I \le U(f,P)$$

jokaisella partitiolla P välille $[a,b]$.

__Lause:__ Jokainen kasvava tai ei-laskeva funktio on Riemann-integroituva. Jokainen jatkuva funktio on Riemann-integroituva.

Perustelu ohitetaan.

Yleiset Riemannin summat

Jälleen olkoon $P = \{x_0, \dots x_n\}$ välin $[a, b]$ jako. Valitaan jokaiselta osaväliltä piste

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i];$$

kutsutaan joukkoa

$$c = \{c_1, c_2, \dots c_n\}.$$

Nämä pisteet ovat näytteenottopisteitä (tags) funktiolle f, jolle Riemannin summa

$$R(f, P, c) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$$

jossa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Jokaisella osavälillä $[x_{i-1}, x_i]$ pätee

$$f(l_i)\Delta x_i \leq f(c_i)\Delta x_i \leq f(u_i)\Delta x_i$$

jossa l_i ja u_i olivat kuten edellä määriteltiin. Summaamalla yli $i = 1, \ldots, n$

$$L(f, P) \leq R(f, P, c) \leq U(f, P)$$

olipa partitio P mikä tahansa.

Jos f olisi Riemann-integroituva niin tihentämällä partitiota P siten että $\|P\| \to 0$

Samaa välttämättä ehtä

$$\lim_{\|P\| \to 0} R(f, P, c) \to I .$$

<u>Määr</u>: Lukua I, joka "puristuu" $L(f,P)$:n ja $U(f,P)$ väliin kun $\|P\| \to 0$ kutsutaan f:n <u>Riemann</u> <u>integraaliksi</u> välillä $[a,b]$; ja merkitään

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Huom</u>: Muuttuja x integraalimerkin sisällä on "muodollinen" "dummy variable". I ei ole funktio vaan <u>luku</u>!

Määrätyn integraalin ominaisuuksia

(i) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(ii) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

(iii) Lineaarisuus:

$$\int_a^b (Af+Bg)(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$$

kaikilla vakioilla A, B, sekä kaikille Riemann-integroituville f, g.

(iv) jos $a < c < b$ niin tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(v) Epäyhtälöt säilyvät integroitaessa:

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x\,[a,b]$$

niin

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

(vi) Kolmioepäyhtälö:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

(vii) Jos f on parillinen eli $f(x) = f(-x)$, niin

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Jos f on pariton niin

$f(x) = -f(-x)$ ja

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Kaikki nämä asiat voidaan "todistaa" lähtien Riemann-integraalin määritelmästä. (Tänään emme jaksa.)

Integraalilaskennan väliarvolause

Lause
Olkoon f jatkuva välillä [a,b]. Tällöin

On olemassa $c \in [a,b]$ siten, että

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$

<u>Tulkinta</u>: f:n keskiarvo välillä $[a,b]$ on

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \bar{f}.$$

Ts. väliarvolauseen nojalla <u>jatkuva</u> funktio saavuttaa keskiarvonsa eräässä pisteessä määrittelyjoukossaan $[a,b]$.

<u>Huom</u>: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{kun } x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$

niin $\bar{f} = \frac{1}{2}$. Mutta $f(x) \neq \bar{f}$ kaikilla $x \in [0,1]$.

Peruste lauseelle:

Olkoon f jatkuva $[a,b]$:ssä. Tällöin on olemassa luvut $m, M \in \mathbb{R}$ siten että

$$m = f(l) \leq f(x) \leq f(u) = M$$

kaikille $x \in [a,b]$.

Tarkastellaan partitiota

$$P = \{a = x_0, x_1 = b\}.$$

Tällä partitiolla

$$L(f,P) = f(l)(b-a) = m(b-a)$$

ja samoin

$$U(f,P) = M(b-a).$$

Koska f on Riemann-integroituva, niin luku $\int_a^b f(t)\,dt$ toteuttaa

$$\underset{f(\ell)}{m}(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \underset{f(u)}{M}(b-a)$$

ts,

$$f(\ell) \leq \overbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}^{\text{luku!}} \leq f(u)$$

Jatkuvuuden takia $\exists\, c$, $c \in [a,b]$, siten että luku $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$;

tämä on erikoistapaus jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuudesta

eli Bolzanon lauseesta.

Paloittain jatkuvat funktiot

Määr: olkoon $c_0 < c_1 < \dots < c_n$ pisteitä reaaliakselilla, ja olkoon f määritelty $\mathbb{R}$:ssä.

Funktio f on paloittain jatkuva jos

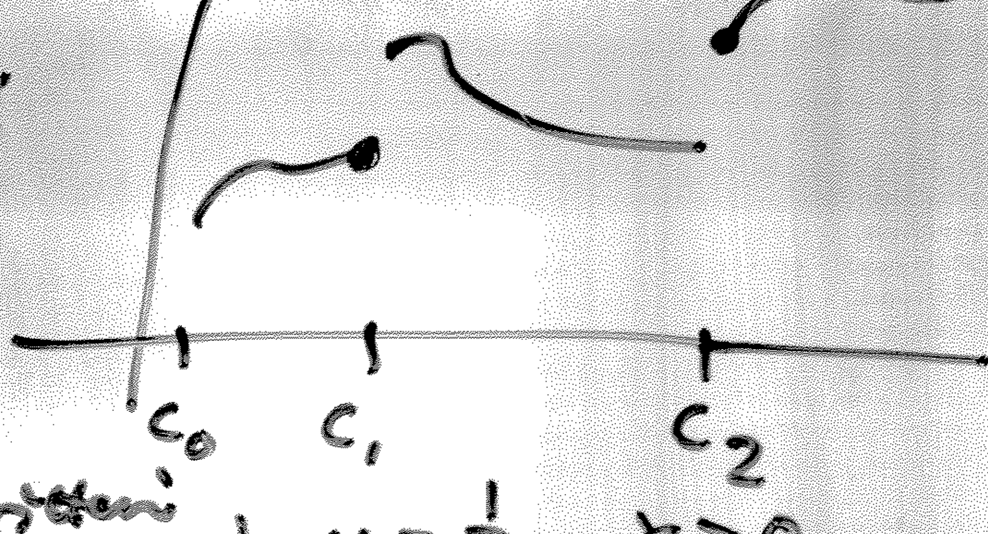
(i) jokaiselle suljetulle osavälille $[c_{i-1}, c_i]$ on olemassa $F_i : [c_{i-1}, c_i] \to \mathbb{R}$ joka on jatkuva koko välillä $[c_{i-1}, c_i]$

(ii) pätee

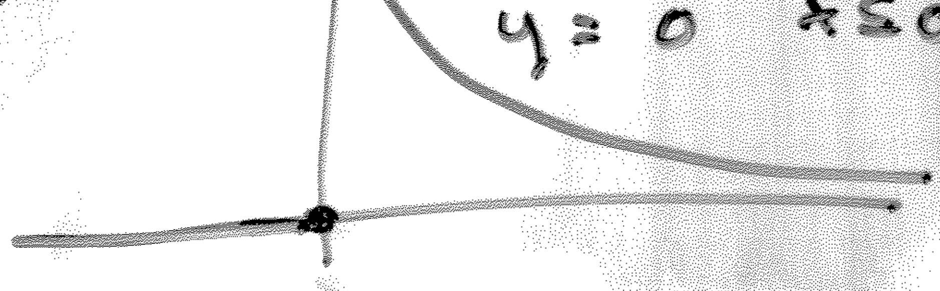
$$f(x) = F_i(x)$$

aina kun $x \in (x_{i-1}, x_i)$.

Esim: Paloittain jatkuva



Ei ole paloittain jatkuva $\mathbb{R}$:ssä



Kaikki paloittain jatkuvat funktiot ovat Riemann-integroituvia.

Pätee paloittain j-valle f

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx}_{\text{jatkuvan funktion Riemann-integraali}}$$

Integraalilaskennan peruslause

"Integraali on eräässä mielessä derivoinnin käänteisoperaatio"

__Lause:__ Olkoon f jatkuva välillä I joka sisältää pisteen a.

(i) Määritelkäämme funktio

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

kullakin $t \in I$.
Tällöin F on derivoituva koko joukossa I, ja lisäksi

$$F'(t) = f(t).$$

(ii) Jos $G(t)$ on mikä tahansa funktio joka toteuttaa $G'(t) = f(t)$ kaikilla $t \in I$, niin

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a).$$

kunhan $b, a \in I$.
Perustelu huomenna.