21.11.2006

Lause: (1. l'Hospitalin sääntö) Jos funktiot f ja g ovat derivoituvia (a,b):ssä. Oletetaan

(i) $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$

(jossa $a < b$ oletetaan.)

(ii) $\lim_{x \to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

(jossa $L \in \mathbb{R}$ tai jopa $\pm\infty$)

Tällöin myös

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Huom: Lausetta voi käyttää myös tilanteessa $a = -\infty$.

Perustelu: Jatketaan funktiot f ja g puoliavoimelle välille $[a, b)$:

$$F(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (a, b) \\ \lim\limits_{x \to a+} f(x) = 0 & \text{kun } x = a \end{cases}$$

$$G(x) := \begin{cases} g(x), & x \in (a, b) \\ 0, & x = a \end{cases}$$

Tällöin F ja G ovat jatkuvia joukossa $[a, b)$ oletuksen (i) takia. Voidaan soveltaa Yleistettyä Väliarvolausetta:

kaikilla $x \in (a, b)$ pätee

$$(*) \quad \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)}$$

Y.V.L. $= \dfrac{F'(c)}{G'(c)}$ jossa

$a < c < x$.

Kun nyt annamme $x \to a+$, niin samalla [illegible] $c \in (a, x)$ puristuu myös kohti lukua a:

Siis $(*)$ implikoi:

$$\lim_{x \to a+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{c \to a+} \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

$= L$. ∎

Esim: Laske

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} \quad \left(\text{muotoa } \left[\frac{0}{0}\right]\right)$$

$$\sim \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

josta päätellään että merkin $\sim$ paikalle voitaisiin korjata $=$ -merkki.

Siis $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{1}{2}$.

Esim: Viime torstain luennolle ollut raja-arvo, joka ratkaistiin silloin Taylorin polynomeilla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2}$$

$$\sim \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x}$$

edelleen muotoa $0/0$

$$\sim \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{2e^{x} - 2}$$

taas $\left(\frac{0}{0}\right)$!

$$\sim \lim_{x \to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{2e^{x}}$$

$$= \frac{-2+8}{2} = 3$$

l'Hospitalin säännön perusteella voidaan lähteä lopusta päin kohti alkua korvaamaan $\sim$-merkit $=$-merkeillä.

Saadaan lopputuloksena

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^{x} - 2 - 2x - x^{2}} = 3.$$

$\longrightarrow$

Esim Laske $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

Raja-arvotehtävä on muotoa $\infty-\infty$ joka ei ole $\frac{0}{0}$.

Nyt

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x - x}{x\sin x}$$

joka on muotoa $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\quad\left[\tfrac{0}{0}\right]$$

$$\sim \lim_{x\to 0+}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$$

$$\sim \lim_{x\to 0+}\frac{-\sin x}{\cos x - x\sin x + \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}$$

$$= \frac{0}{2} = 0.$$

Taas l'Hospitalin sääntö antaa luvan korvata osamäärät yhtä suurilla kuin, ja saadaan

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=0.$$

∎

<u>Lause</u>: (2. l'Hospitalin sääntö). Olkoon f ja g derivoituvia välillä (a,b) ja $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$. Jos ~~pätee~~

(i) $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} g(x)$

$=$ ~~∞~~

(ii) $$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

Tällöin myös

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

Perustelu ohitetaan mutta vihjeen voi löytää Adamsin harjoitustehtävistä.

Esim: Laske

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\sim \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}$$

$$\sim \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

l'Hospitalin (2.) sääntö antaa korvata $\sim$-merkit yhtäsuuruuksilla.

Samoin todistetaan että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$$

kaikille polynomeille

$p(x)$. Argumentti perustuu siihen että m kertaa derivoitaessa polynomi astetta n saadaan vakiotermi, jossa $m \leq n$. ∎

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^7}{e^x} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$ joka

on muotoa $\frac{0}{0}$.

Tähän voitaisiin soveltaa l'Hospitalin 1. sääntöä (mitä tapahtuu?).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\sim \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{\left(-\frac{2}{x^3}\right)}$$

$$\sim \ldots \sim \ldots \sim \ldots$$

$$\sim \lim_{x\to\infty} \frac{(-1)^k e^{-x}}{\left(\frac{(-1)^k (k+1)!}{x^{k+2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{k+2}}{e^x}$$

Jokainen saaduista uusista raja-arvoista on yhtä vaikea (tai vaikeampikin) laskea kuin se josta lähdimme liikkeelle $\Rightarrow$ l'Hospitalin 1. säännön käyttäminen ei kannata.

Eräiden summalausekkeiden summien kaavoja

Paljonko on

$$S = \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n \,?$$

Idea: Jos summan tekijät vastaavat dominopalikkapinojen korkeuksia, niin jokaisessa pinossa olisi keskimäärin $\frac{n+1}{2}$ palikkaa. Koska pinoja on n kpl, saadaan

$$S = n\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Toinen tapa:

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$
$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots (n+1)}_{n \text{ kpl}}$$

Siis $2S = n(n+1)$.

Lasketaan summa

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$$

<u>Ansatz</u>:

$$P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$$

eli yhtä astetta korkeampi kuin $x^2 =: q(x)$ jolle

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} q(i).$$

Etsi kertoimet a, b, c, d!

$$P(n+1) - P(n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)^2$$

fn:s

$$a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d - an^3 - bn^2 - cn - d = n^2 + 2n + 1$$

kaikilla n.

$$a(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + b(n^2 + 2n + 1) + c(n+1) + d$$

$$- an^3 - bn^2 - cn - d$$

$$= 3an^2 + (3a + 2b)n + (a + b + c)$$

$$= n^2 + 2n + 1 \quad \forall n.$$

Josta yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 2 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

Ratkaisemalla yhtälöryhmä saadaan

$$P(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Huomautus: Samalla tekniikalla voidaan laskea kaikki summat muotoa

$$\sum_{i=1}^{n} q(i)$$

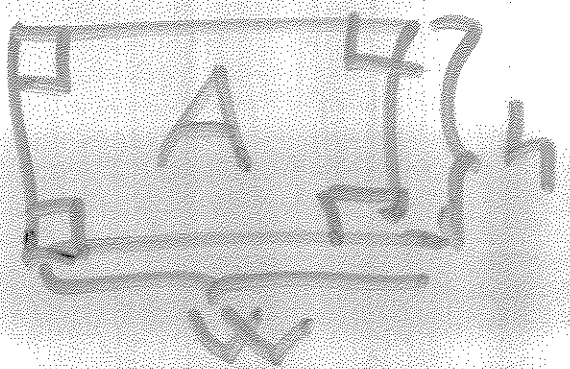
jossa $q(i)$ on i:n polynomi.

Integraalilasku

Pinta-ala-aksioomat:

(i) Alueen ($\mathbb{R}^2$:ssa) pinta-ala on posit. reaaliluku, ja sen yksikkö on "pinta-ala-yksikkö".

(ii) Suorakaiteen pinta-ala on $A = wh$, jossa w on kannan pituus ja h korkeus:



(iii) Yhtenevien alueiden pinta-alat ovat samoja.

(iv) Jos alue A on osajoukko alueesta B, niin tällöin A:n pinta-ala on korkeintaan yhtä suuri kuin B:n pinta-ala.

(v) Jos alue A on pistevieras unioni alueista

$A_1, A_2, \ldots A_n$
niin tällöin yhdisteen
$\bigcup A_i$ pinta-ala on
pinta-alojen summa.
("pistevieras" tarkoittaa
että $A_i \cap A_j = \emptyset$
kaikilla $i \neq j$.)

Nämä kaksi pinta-ala-
aksioomaa riittävät
siihen, että niiden
päälle voidaan rakentaa
reaalimuuttujan integraali-
laskenta.

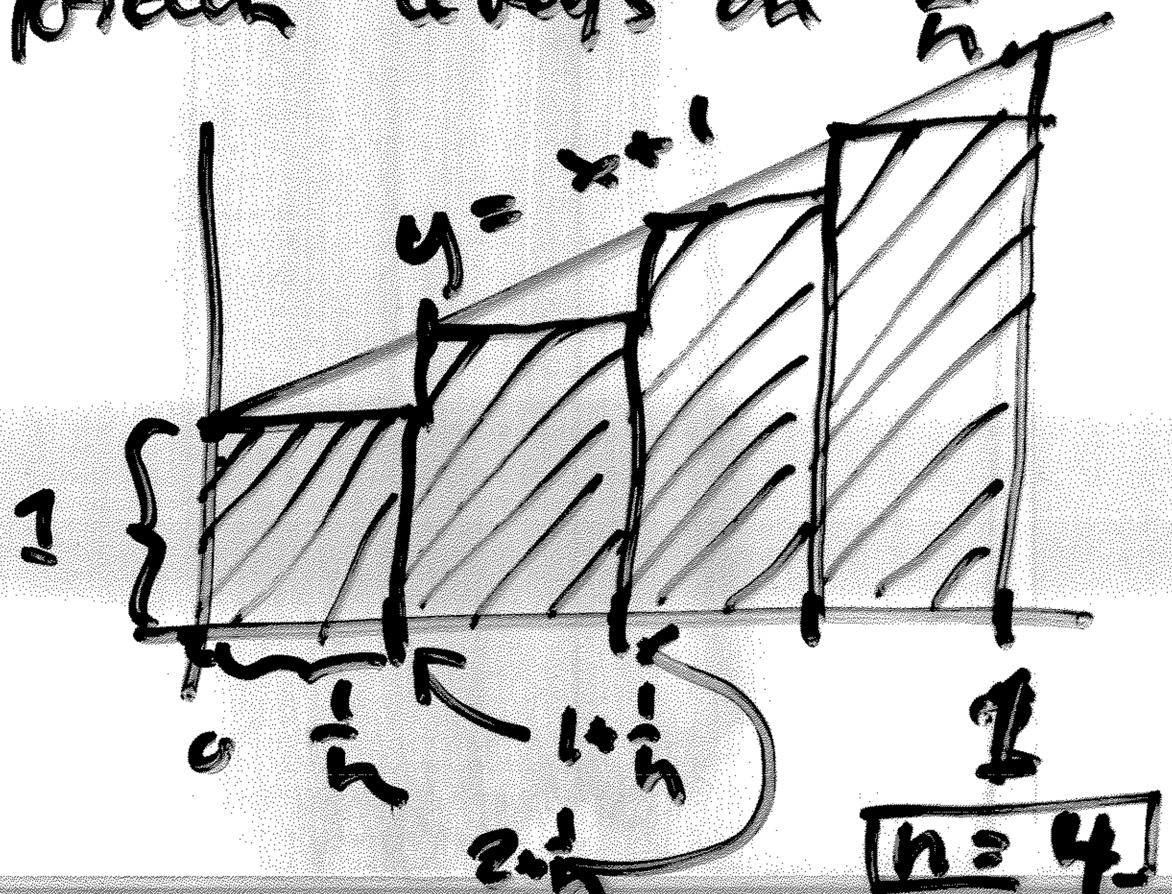
Voidaan nimittäin
laskea pinta-alan
mielivaltaiselle moni-
kulmiolle hajoittamalla
se äärelliseksi määräksi
kolmioita — kolmioiden

voidaan palauttaa suorakaiteiden alojen laskemiseen.

Jos alue <u>ei</u> ole suorakaide, niin silloin sitä tulee lähestyä sisältä tai ulkoa käsin suorakaiteiden yhdisteellä ja hoitaa tarvittava rajankäynti raja-arvojen teorialle.

<u>Esim</u>: Laske se pinta, jonka suora $y = x+1$ rajaa x-akselin, y-akselin ja suoran $x=1$ välin.

Piirrämme ko. alan sisään suorakaiteita, joiden leveys on $\frac{1}{n}$.



Suorakaiteiden pinta-alojen summa

$$S_n = 1\cdot\frac{1}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \dots + \left(1+\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k-1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{=n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\Big)$$

$$= 1 + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 1 + \frac{1}{n^2}\,\frac{(n-1)(n)}{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)(1)$$

$$\to \frac{3}{2} \quad \text{kun} \quad n \to \infty.$$

Laskimme yllä funktiolle $y = x + 1$ nk. <u>Riemannin alasumman</u> tasavälitellä vähin [0, t] jaolla.

Funktiot $y = p(t)$ jossa
p polynomi voitaisiin
käsitellä samalle
tavalla – aluksi
summan $\sum_{k=1}^{n-1} k$
Sijasta saataisiin
$\sum_{k=1}^{n-1} p(k)$ joka tulisi
laskea Ansatzin avulla.