16.11.2006

Taylorin polynomit

Oletetaan että funktio f on n. kertaa derivoituva jossain pisteen $a \in \mathbb{R}$ ympäristössä.

Taylorin polynomit pisteessä a

$$P_1(x), \; P_2(x), \ldots, P_n(x)$$

määritellään kaavalla:

$$P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

jossa $k = 1, \ldots, n$.

Suoraan derivoimalla huomataan että

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

kaikilla $k = 1, \ldots, n$.

Tämä karakterisoi Taylorin polynomin täysin: on vain yksi astetta n oleva polynomi, jolla samat pisteessä a n. ensimmäistä derivaattaa kuin kuin funktiolla f.

On syytä odottaa, että kun $x \approx a$ ja n on iso, niin tällöin approksimaatiovirhe

$$E_n(x) := f(x) - P_n(x)$$

on pieni.

Virhetermille $E_n(x)$ voidaan antaa nk. ~~Lagrangen~~ jäännöstermin kaava, josta tämä asia ilmenee.

Lause: Jos f on $n+1$ kertaa derivoituva välillä johon a, x kuuluvat ja $P_n(x)$ on f:n Taylorin polynomi astetta n, pisteessä a (kehityskeskus a) niin tällöin

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

jossa

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\dot{X})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

jossa $\dot{X} \in (a, x)$. (oletetaan notation vuoksi $a<x$.)

Perustelu: Tapaus $n=0$

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{P_0(x)} + f'(\dot{X})(x-a)$$

jossa $\dot{X} \in (a, x)$.

Tämä on väliarvolause:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(\dot{X}).$$

Tuttua kamaa.

Entä tapaus $n=1$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{P_1(x)} + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$$

jossa $\xi \in (a, x)$.

Nyt $P_1(x) = L(x)$ eli lineaarinen approksimaatio. Sen virhetermi on

$$E_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$$

eilisen luennon perusteella.

Yleinen tapaus etenee ns. induktiopäättelyllä:

Oletetaan että tapaus $n = k-1$ on jo todistettu kaikille funktioille f. Todistetaan että tästä seuraa tapaus $n=k$ kaikille funktioille f.

Tutkitaan termiä $E'_k(x)$ tarkemmin:

$$E'_k(c) = \frac{d}{dt}\left(f(t) - P_k(t)\right)\Big|_{t=c}$$

$$= f'(c) - \frac{d}{dt}\Big(f(a) + f'(a)(t-a)$$

$$+ \frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\Big)\Big|_{t=c}$$

$$= f'(c) - f'(a) - f''(a)(c-a)$$

$$- \frac{f'''(a)}{2!}(c-a)^2 - \dots$$

$$\frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(c-a)^{k-1}$$

$$=: \tilde{E}_{k-1}(c)$$

Jossa $\tilde{E}_{k-1}(c)$ on funktion f' $k-1$-asteen Taylorin polynomin virhetermi.

Induktiohypoteesi:

Oletetaan että jäännöstermin muoto oli jo tarkastettu kaikille funktioille f kaikille indekseille

$$n=0,\ n=1,\ \dots\ n=k-1;$$

Ts.

$$(*)\qquad E_{k-1}(x) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-a)^k.$$

Tarkastellaan tapausta $n=k$. Sovelletaan yleistettyä väliarvolausetta (eilinen luento) funktioihin $E_k(t)$ ja $(t-a)^{k+1}$ jossa $t \in (a,x)$.

$$\frac{E_k(x)}{(x-a)^{k+1}} = \frac{E_k(x) - \overbrace{E_k(a)}^{=0}}{(x-a)^{k+1} - (a-a)^{k+1}}$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{E_k'(c)}{(k+1)(c-a)^k} \qquad \text{jossa } c \in (a,x).$$

Soveltamalla induktiohypoteesia(*) funktioon f', saadaan

$$E'_n(c) = \tilde{E}_{k-1}(c) = \frac{(f')^{(k)}(\xi)}{k!}(c-a)^k$$

jossa $\xi \in (a, c)$.

Siis

$$E'_n(c) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(c-a)^k$$

joka sijoittamalla kaavaan (**) antaa väitteen myös tapauksessa $n=k$. ∎

<u>Esim:</u> Laske 2. asteen Taylorin approksimaatiolla $\sqrt{26}$, käyttäen kehityskeskipisteenä $a=25$. Arvioi virhettä Lagrangen jäännöstermillä $E_2(x)$.

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}},$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$\sqrt{26} = f(26) = f(25) + f'(25)(26-25)$$
$$+ \frac{f''(25)}{2!}(26-25)^2 + E_2(26)$$
$$= 5 + \frac{1}{10} + \frac{1}{1000}$$
$$+ E_2(26)$$
$$= 5{,}099 + E_2(26).$$

Virhetermille kokoarvio:

$$|E_2(26)| = \left| \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(26-25)^3 \right|$$
$$\leq \frac{1}{6} \cdot \max_{t \in [25,26]} |f^{(3)}(t)|$$

laskeva funktio

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{3}{8 \cdot 3125} = \frac{3}{25000}$$

$$= 0,00012.$$

Päätellään, että

$$\sqrt{26} \approx 5.099 \pm 0,00012.$$

Esim: Halutaan laskea e:n arvo käyttäen exp. funktion Taylorin sarjaa pisteessä $a = 0$ (McLaurinin sarja!). Kuinka monta termiä mukaan jotta saadaan 3 oikeaa desim.?

Täytyy etsiä niin iso järjestysluku n, että virhetermi

$$E_n(1) < 0,0005$$

jossa

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Lagrangen virhetermi

$$E_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}(x)^{n+1}$$

jossa $\xi \in (0, x)$.

$$e^x = P_n(x) + E_n(x)$$

josta saadaan likiarvostus

$$e = P_n(1) + E_n(1).$$

Eksponenttifunktion on kasvava, ja saadaan

$$|E_n(1)| = \left| \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{t \in [0,1]} |e^{t}|$$

koska $\xi \in (0, 1)$.

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} e^1 \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

jossa oletetaan tiedetyksi hyvin huono yläraja

$$e \leq 3.$$

Tällöin, jos $n \geq 7$, niin $\frac{3}{(n+1)!} \leq 0{,}0005$.

Siis 7 termiä riittää. Jos $n = 6$ niin y.o. epäyhtälö ei toteudu.

Iso-O notaatio

Määr: Kirjoitetaan lyhyesti

$$f(x) = \mathcal{O}(u(x))$$

kun $x \to a$ mikäli

mikäli on olemassa jokin avoin väli a:n ympärillä jossa pätee epäyhtälö

$$|f(x)| \leq K|u(x)|$$

kaikilla x tässä avoimessa välissä; $K < \infty$.

Ts. $u(x)$:n arvot rajoittavat $f(x)$:n arvoja pisteen a välittömässä läheisyydessä.

Esim: $f(x) = \sin x$

ja $u(x) = x$; $a = 0$.

Tällöin

$$|\sin x| \leq |x|$$

kun $x \approx 0$, koska

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Siis $\sin x = O(x)$.

$\cos x = O(1)$ kun $x \to \infty$.

~~Koska~~ Tosiaankin,

$|\cos x| \leq 1$ kaikilla x,

erityisesti kun $x \to \infty$.

Siis kysymys on siitä, että funktioiden $f(x)$ ja $u(x)$ osamäärä

$\left|\frac{f(x)}{u(x)}\right|$ pysyy rajoitettuna

kun x on a:n ympäristössä.

Erityisesti näin tapahtuu jos

$$\lim_{x \to a} \left|\frac{f(x)}{u(x)}\right| \quad \exists$$

äärellisenä lukuna:

Iso $\mathcal{O}$:n ominaisuuksia

(i) Jos $f(x) = \mathcal{O}(u(x))$ kun $x \to a$, niin tällöin jokaisella vakiolla $C \in \mathbb{R}$ pätee

$$Cf(x) = \mathcal{O}(u(x)).$$

(ii) Jos $f(x) = \mathcal{O}(u(x))$ ja $g(x) = \mathcal{O}(u(x))$ kun $x \to a$, niin ~~tällöin~~

$$f(x)+g(x) = \mathcal{O}(u(x)).$$

Tosiaan

$$\left| \frac{f(x)+g(x)}{u(x)} \right| \overset{\text{kolmioepäyhtälö}}{\leq} \underbrace{\left| \frac{f(x)}{u(x)} \right|}_{\substack{\text{raj. koska} \\ f(x) = \mathcal{O}(u(x))}} + \left| \frac{g(x)}{u(x)} \right|$$

rajoitettu, koska $g(x) = \mathcal{O}(u(x))$.

Esim: eksponenttifunktion Taylorin sarja antaa

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4).$$

kun $x \approx 0$.

Totta koska

$$E_3(x) = \frac{e^{\bar{x}}}{4!} x^4$$

joka toteuttaa selvästi

$$E_3(x) = O(x^4).$$

l'Hôpitalin sääntö

l. l'Hospitalin sääntö

l. "sairaalasääntö".

Tämä on fiksu tapa laskea tiettyjen epämääräisten rationaalifunktioiden raja-arvoja nimittäjän nollakohdissa.

<u>Esim:</u> Laske

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{\underbrace{2e^{x}-2-2x-x^{2}}_{\text{tällä nimittäjällä on pisteessä } x=0 \text{ kolme ensimm. nollaa derivaattaa}}}$$

Taylorin polynomit.

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) \\ \sin 2x = 2x - \frac{8x^3}{3!} + O(x^5) \\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4) \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right) - \left(2x - \frac{8}{3}x^3 + O(x^5)\right)}{\left(2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)\right) - 2 - 2x - x^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\left(-\frac{2}{6} + \frac{8}{3}\right)}^{=1} x^3 + O(x^5)}{2 \cdot \frac{x^3}{6} + O(x^4)}$$

laskuvirhe

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{O(x^5)}{x^3}}{\frac{1}{3} + \frac{O(x^4)}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + O(x^2)}{\frac{1}{3} + O(x)}$$

$$= \frac{1 + \lim_{x\to 0} O(x^2)}{\frac{1}{3} + \lim_{x\to 0} O(x)} = \frac{1+0}{\frac{1}{3}+0} = 3.$$