# Epälineaarisen yhtälön numeerisesta ratkaisemisesta

15.11.2006

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Tarkalle ratkaisulle kaava

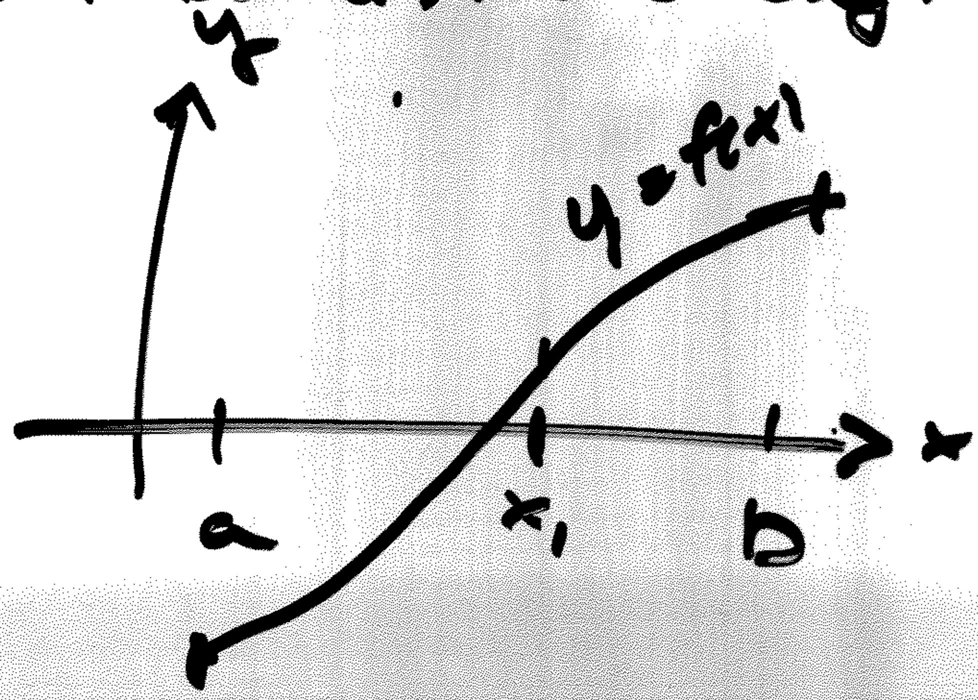
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Tällaisen kaavan olemassaolo käytännön sovelluksissa esiintyville yhtälöille on liian hyvää ollakseen totta.

Esim: olkoon $f(x)$ funktio siten että $f(a) = -1$, $f(b) = +1$. Jos $f$ on j-va, niin väliarvo-ominaisuus sanoo, että on olemassa luku $c \in (a,b)$ s.e.

$$f(c) = 0$$

Haarukointimenetelmä:




$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

lasketaan $f(x_1) > 0$

$f(a) < 0$

josta päätellään, että väh. yksi ratkaisu yhtälölle

$$f(x) = 0$$

sijaitsee välillä $(a, x_1)$.

Koska $|a - x_1| = \frac{1}{2}|b-a|$

niin virhe on puolittunut.

Näin jatkamalla päästään hitaasti joskin varmasti kohti ratkaisua.

Haarukointimenettely vaatii ainoastaan että f on jatkuva; hyvin pieni vaatimus

=> Soveltuu hyvin monille funktioille

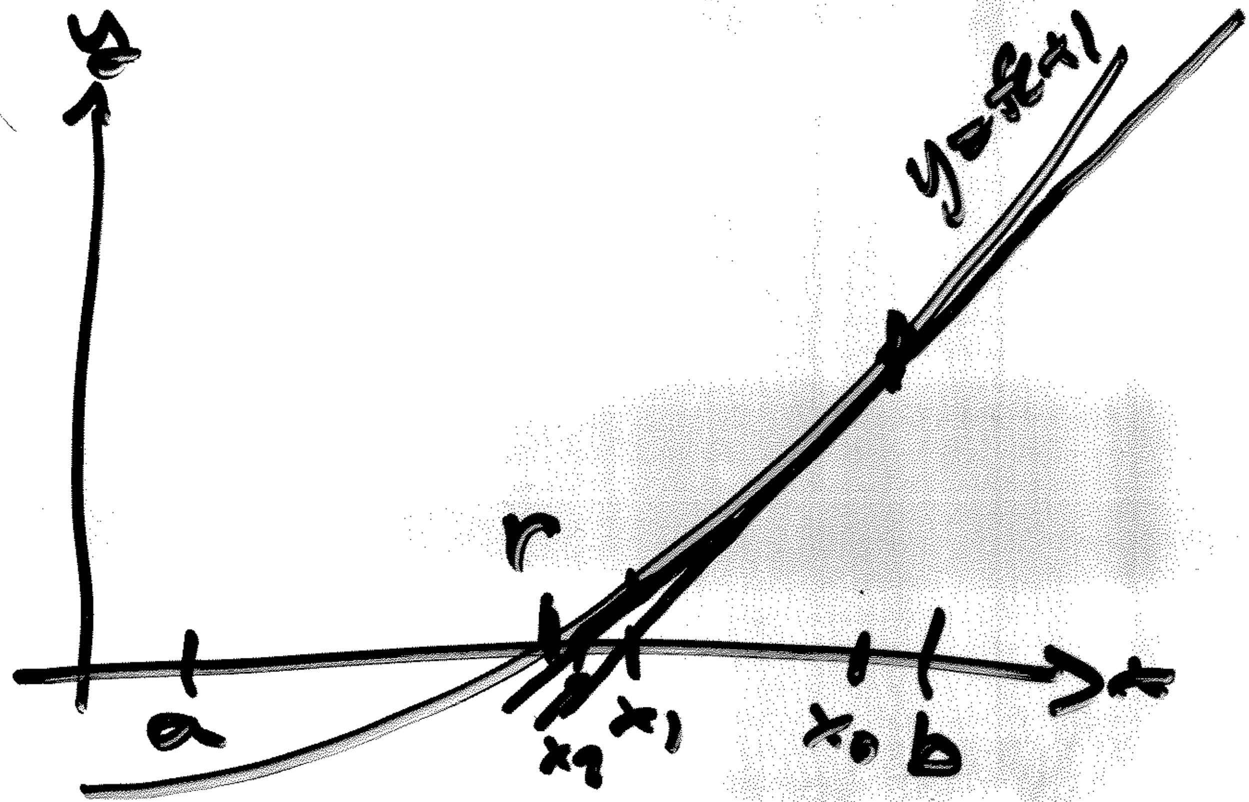
=> ei erityisen tehokas millekään funktiolle.

Voimmeko ~~[illegible]~~ keksiä tekniikan, joka antaisi nopeammin ja halvemmalla enemmän oikeita desimaaleja funktioille, joilla on ainakin yksi derivaatta?

KYLLÄ.

Eräs tällainen tekniikka on Newtonin iteraatio.

Konveksin funktion tapauksessa seuraava kuva kertoo idean:




Etsi $r \in (a,b)$ s.e.
$f(r) = 0$.

Otetaan alkuarvaus
$x_0 \in (a,b)$.

Tangentin ja x-akselin leikkauskohdasta saadaan parempi arvaus juurelle $r$ kuin $x_0$. Tämä on $x_1$.
Jatketaan samalla tavalla.
konveksisuuden takia

Saatu jono likiarvoja

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

lähestyy kohti juurta $r$ oikealta päin.

Kuinka kaarella?

Tangentti pisteessä $x_0$ käyrälle $y = f(x)$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Leikkauspiste $x_1$ saadaan yhtälöstä

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

josta ratkaisemalla

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Näinollen etsitty Newtonin iteraatio on

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Tämä kaava edellyttää että $f'(r) \neq 0$ tai on riski siitä että jotain ikävää tapahtuu.

Tapahtuuko todellakin että $\lim_{n\to\infty} x_n = r$ on juuri?.

Oletetaan että funktio

$$x \longmapsto \frac{f(x)}{f'(x)}$$

on jatkuva välillä $(a,b)$.

$$
\begin{aligned}
r &= \lim_{n\to\infty} x_n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right) \\
&= \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_{n-1}}_{=r} - \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}
\end{aligned}
$$

Joten

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = 0 .$$

60

Toisaalta, koska $\frac{f}{f'}$ on jatkuva

ja $x_{n-1} \to r$ kun $n \to \infty$,
saadaan

$$(**) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = \frac{f(r)}{f'(r)}.$$

Koska raja-arvot yhtäsuuria ($ja\ f'(r) \neq 0$) niin $f(r)=0$ vertaamalla (*) ja (**)

<u>Esim:</u> Ratkaise

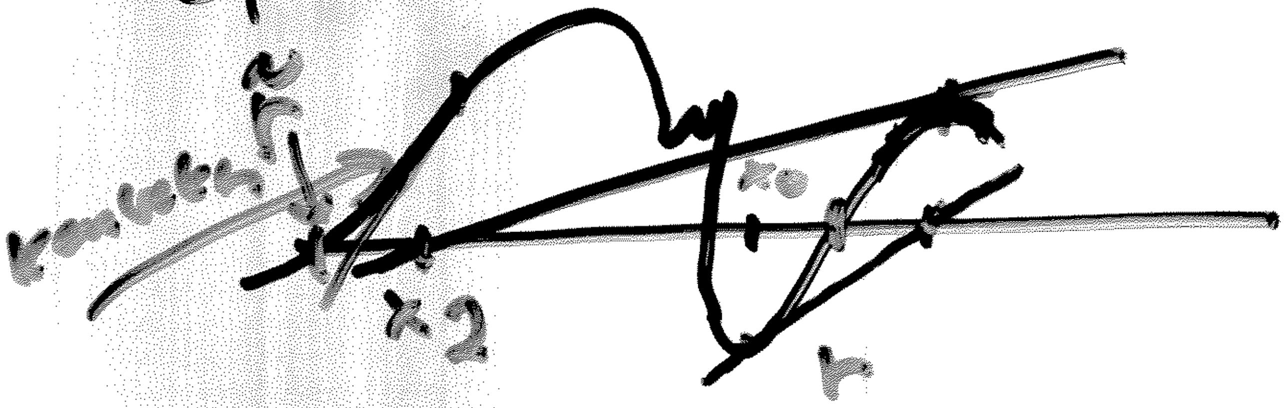
$$x^3 = \cos x.$$

Kirjoitetaan $f(x) = x^3 - \cos x$.
$f'(x) = 3x^2 + \sin x$, josta Newtonille kaava

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - \cos x_k}{3x_k^2 + \sin x_k}.$$

$f(0{,}8) < 0$ ja $f(1) > 0$.
Tässä kävi niin, että $x_0 = 0{,}8$ sattui olemaan sellainen alkuarvo, joka tuotti halutun jonon.

Kaukutarunna alkuarvauksen epäonnistumisesta




Halutaan löytää juuri r, $\hat{r}$ ei voisi vähempää kiinnostaa.
Alkuarvauksella $x_0$ päädytään $x_1$:een jossa $f'(x_1) \neq 0$.
Tällöin $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ menee kauas...
ja koska f on kaukana konveksi, iteraatio etenee kaukaisimmuudessa kohti ei-haluttua juurta $\hat{r}$.

Newtonin iteraatiolle on olemassa seuraava <u>kvadraattinen</u> virhearvio:

<u>Lause:</u> Olkoon f ja f'' jatkuvia välillä I jossa kaikki Newtonin iteraatiot

$$x_0, x_1, \dots, x_n \dots$$

kuuluvat I:hin, ja lisäksi I:ssä on yksikäsitteinen yhtälön $f(x)=0$ ratkaisu r.

(i) $|f''(x)| \leq K$ kaikille $x \in I$

(ii) $|f'(x)| \geq L > 0$ kaikilla $x \in I$.

Tällöin

(a) $$|x_{n+1} - r| \leq \frac{K}{2L} |x_{n+1} - x_n|^2$$

(b) $$|x_{n+1} - r| \leq \frac{K}{2L} |x_n - r|^2$$

Jos olisi niin että $\frac{K}{2L} \leq 1$, niin ~~tällöin~~ virhe toteuttaisi (b):n ~~tahin~~

$$|x_{n+1} - r| \leq |x_n - r|^2$$

ja joka askeleella tulisi tuplasti oikeita desimaaleja; vrt. yksi desimaali haarukointimenetelmässä.

Jos $\frac{K}{2L} > 1$, niin suppenemiseksi riittää olla

$$\frac{K}{2L} |x_k - r| < 1 \quad \text{tmk...}$$

Tällöin

$$|x_{k+1} - r| \leq \underbrace{\frac{K}{2L} |x_k - r|}_{<1} \cdot |x_k - r|$$

$$< |x_k - r|$$

joten virhe vähenisi joka askeleella.

# Lineaariset approksimaatiot ja niiden virhearviot

**Määr:** Jos $f'$ on jatkuva niin fn lineaarinen approksimaatio pisteessä $a \in D(f)$ on

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

**Esim:** Laske $\sqrt{26}$ likimäär. käyttäen lin. appr. pisteessä $25 = a$. $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$L(x) = \sqrt{25} + \frac{1}{2}(25)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x-25) = \sqrt{25} + \frac{x-25}{10}$$

jossa $x = 26$, niin saadaan $L(26) = 5 + \frac{1}{10} = 5{,}1$.

## Virheanalyysi:

Tähän tarvitaan teknillinen apuneuvo: Yleistetty väliarvolause (Adamsin 5 painos, s. 139).

**Lause:** Olkoon $f, g$ jatkuvia $[a,b]$ sekä derivoituvia $(a,b)$ ja oletetaan että $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$.

Tällöin on olemassa $c \in (a,b)$ joka toteuttaa

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Tavallinen väliarvolause sanoo että $\exists\ c_1$ ja $c_2$ siten että

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c_1)$$

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c_2)$$

Jakamalla nämä toisillaan saadaan

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

! mutta ei ole mitään kontrollia siitä että $c_1 \neq c_2$.

<u>Oikea</u> <u>perustelu</u>:

$$h(x) := [f(b)-f(a)][g(x)-g(a)] - [g(b)-g(a)][f(x)-f(a)]$$

Tällöin $h(b) = h(a) = 0$.
Tällöin tavallinen väliarvolause sanoo:

$$\exists\, c \in (a,b) \text{ s.e. } h'(c) = 0.$$

Tällöin

$$h'(x) = [f(b) - f(a)]\, g'(x) - [g(b) - g(a)]\, f'(x)$$

johon sijoittamalla $h'(c)=0$ saadaan väite $\square$

Lineaarisen approksimaation virhearvio:

__Lause:__ Jos $f''(t)$ on olemassa jokaiselle $t \in (a,x)$, niin tällöin on olemassa eräs piste $X \in (a,x)$ siten että

Lineaarisen approksi-maation

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

virhe

$$E(x) := f(x) - L(x)$$

toteuttaa epäyhtälön

$$(**) \quad E(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2 .$$

~~kun~~

Huom: Kaavassa $(**)$ emme tiedä mitä $\xi$ tarkkaan ottaen on, paitsi se tieto että

$$\xi \in (a, x) .$$

Seurauslause:

Jos edellisen lauseen oletusten lisäksi tiedetään että

$$|f''(x)| \leq M < \infty$$

niin tällöin (*) antaa virheelle ylärajan

$$|E(x)| \leq \frac{M}{2}|x-a|^2.$$

Siis: Ensimmäisen kertaluvun (lineaarisen) approksimaatio $L(x)$ antaa virhetermin joka on toista kertalukua.

Perustelu: Yleisyyttä menettämättä sovitaan että $x > a$. Virheelle saadaan

$$E(t) = f(t) - f(a) - f'(a)(t-a)$$

kaikilla $t$. Tällöin

$$E'(t) = f'(t) - f'(a).$$

Käytetään yleistettyä väliarvolausetta funktioihin $E(t)$ ja $(t-a)^2$.

Siis on olemassa $c \in (a,t)$ jolla pätee

$$\frac{E(t)}{(t-a)^2} = \frac{E(t) - \overbrace{E(a)}^{=0}}{(t-a)^2 - \underbrace{(a-a)^2}}$$

$$\underset{\text{Y.V.A.L.}}{=} \frac{E'(c)}{2(c-a)} = \frac{f'(c) - \overbrace{f'(a)}^{=0}}{2(c-a)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(c) - f'(a)}{c-a}$$

Mutta tavallinen väliarvolause sanoo, että nyt on olemassa

$$\xi \in (a,c)$$

jolla

$$\frac{E(t)}{(t-a)^2} = \frac{1}{2} \frac{f'(c) - f'(a)}{c-a}$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi).$$ ∎

Joka todisti väitteen!

Esim: $f(x) = \sqrt{x}$

$a = 25, \quad f(a) = 5$

$E(26) = \, ?$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$

$|E(26)| \leq \frac{1}{2} \cdot \underbrace{f''(25)}_{\frac{1}{500}} \cdot (26-25)^2$

$= 0{,}0001.$

Siis saadaan

$\sqrt{26} \approx 5{,}1 \pm 0{,}0001.$

Virheellä on myös tunnettu etumerkki, koska lin. appr. eli tangentti on konkaavin funktion $\sqrt{x}$ yläpuolella.