14.11.2001

Derivaattojen käyttö ääriarvojen määräämisessä

Määr: Funktiolla f on pisteessä $x_0 \in D(f)$

(i) absoluuttinen maksimi jos $f(x) \leq f(x_0)$ kaikilla $x \in D(f)$.

(ii) absoluuttinen minimi jos $f(x) \geq f(x_0)$ kaikilla $x \in D(f)$.

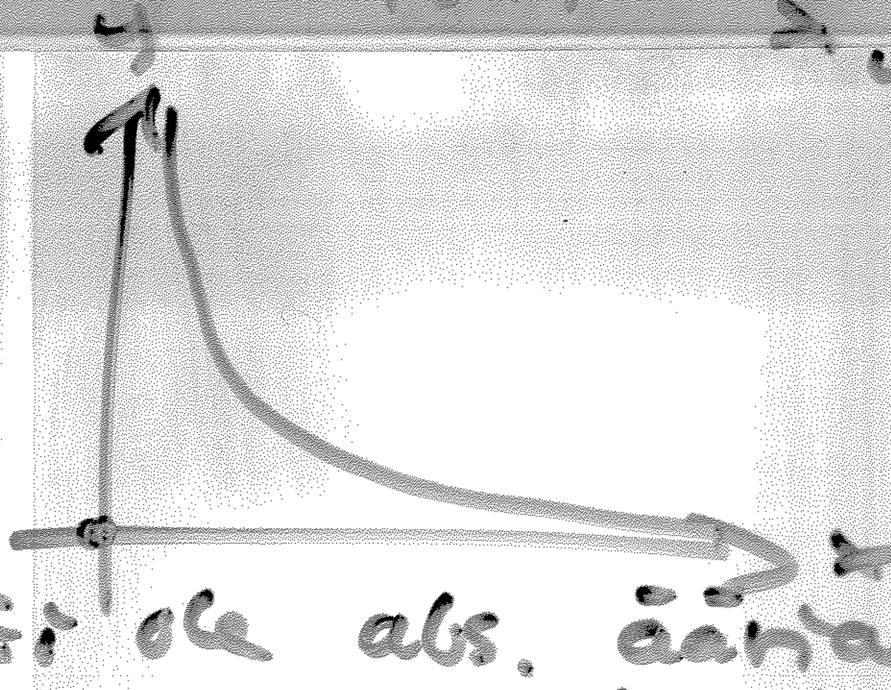
Huom: Abs. ääriarvon ei tarvitse olla saavutettavissa yksikäsitt. pisteessä x_0; $f(x) = \sin x$, $D(f) = \mathbb{R}$.
Abs. max $= 1$ saavutetaan pisteissä

$$x_k := \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Lause: Olkoon f jatkuva funktio ja D(f) olkoon äärellinen yhdiste suljetuista & rajoitetuista väleistä, niin tällöin f:llä on abs. maksimi ja abs. minimi.

Huom: Määritelmässä ei vaadittu jatkuvuutta.

Esim: $f(x) = \frac{1}{x}$, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}_+$.



Ei ole abs. ääriarvoja: $x = 0$ ei kuulu $D(f)$:ään. $+\infty$ ei ole reaaliluku.

(2) Ei ole sellaista pistettä $x_0 \in \mathbb{R}_+$ jossa $f(x_0) = 0$ vaikkakin $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

<u>Määr:</u> Olkoon $D(f)$ yhdiste äärellisestä määrästä avoimia, puoliavoimia ja/tai suljettuja välejä.

(i) f:llä on <u>paikallinen maksimi</u> pisteessä x_0, jos $x_0 \in D(f)$ ja on olemassa $h > 0$ siten että

$$f(x_0) \geq f(x)$$

kaikilla x: $|x - x_0| < h$, joilla pätee myös $x \in D(f)$.

(ii) f:llä on <u>paikallinen minimi</u> pisteessä x_0 jos $-f$:llä on paikallinen maksimi pisteessä x_0.

<u>Lause</u>: Olkoon f funktio, jonka määrittelyjoukko on väli $I := (a,b)$; $[a,b)$; $(a,b]$; $[a,b]$. Jos f:llä on ääriarvo pisteessä $x_0 \in I$, niin tällöin x_0 on joko

(i) f:n <u>kriittinen piste</u> l. piste jossa $f'(x_0)$ ∃ ja $f'(x_0) = 0$.

(ii) välin I päätepiste a tai b

(iii) f:n <u>singulaarinen piste</u> l. piste jossa $f'(x_0)$ ei ole olemassa.

<u>Perustelu</u>: Oletetaan että x_0 on f:n paikallinen maksimi.

Riittää osoittaa seuraava:

Jos x_0 ei ole välin päätepiste eikä singulaarinen piste, niin tällöin se on derivaatan nollakohta.

Siis $f'(x_0)$ $\exists$. Koska x_0 on paikallinen maksimi, on olemassa $h > 0$ siten että

$$(1) \quad \frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta} \leq 0$$

kaikilla $h > \Delta > 0$;

ja samoin

$$(2) \quad \frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta} \geq 0$$

kaikilla $0 > \Delta > -h$.

Siis

$$(1) \Rightarrow \lim_{\Delta \to 0+} \frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta} \leq 0$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{\Delta \to 0-} \frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta} \geq 0$$

Koska $f'(x_0)$ $\exists$, nämä raja-arvot ovat yhtäsuuria.

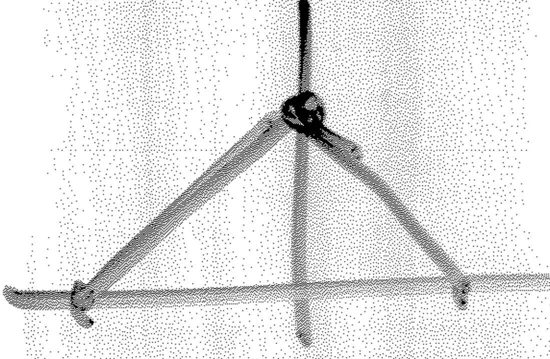
Siis sekä $f'(x_0) \leq 0$

että $f'(x_0) \geq 0$.

Seuraa että $f'(x_0) = 0$. ∎

Esim: $f(x) = 1 - |x|$

$D(f) = [-1, 1]$.



Paikallinen ja absoluuttinen maksimi pisteessä $x_0 = 0$.

Singulaarinen piste.

Nyt

$$\lim_{\Delta \to 0+} \frac{f(\Delta)-f(0)}{\Delta} = -1 \leq 0$$

ja

$$\lim_{\Delta \to 0-} \frac{f(\Delta)-f(0)}{\Delta} = 1 \geq 0.$$

Eri suuria, siis $f'(0) \nexists$.

Huom: Edellistä lausetta käytetään hyvin usein siten, että pienennetään niiden pisteiden joukkoa, joissa ääriarvo joudutaan konkreettisesti laskemaan.

Huom: funktion määrittelyjoukko saattaa koostua pelkästään singulaarisista pisteistä:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Lause: Oletetaan että $f(x)$ on jatkuva pisteessä x_0 ja lisäksi x_0 ei ole $D(f)$:n reunapiste.
Olkoon x_0 f:n kriittinen tai singulaarinen piste

(i) Jos on olemassa avoin väli $(a,b) \in D(f)$ siten että

$$f'(x) > 0 \quad \text{kun } x \in (a, x_0)$$

ja

$$f'(x) < 0 \quad \text{kun } x \in (x_0, b)$$

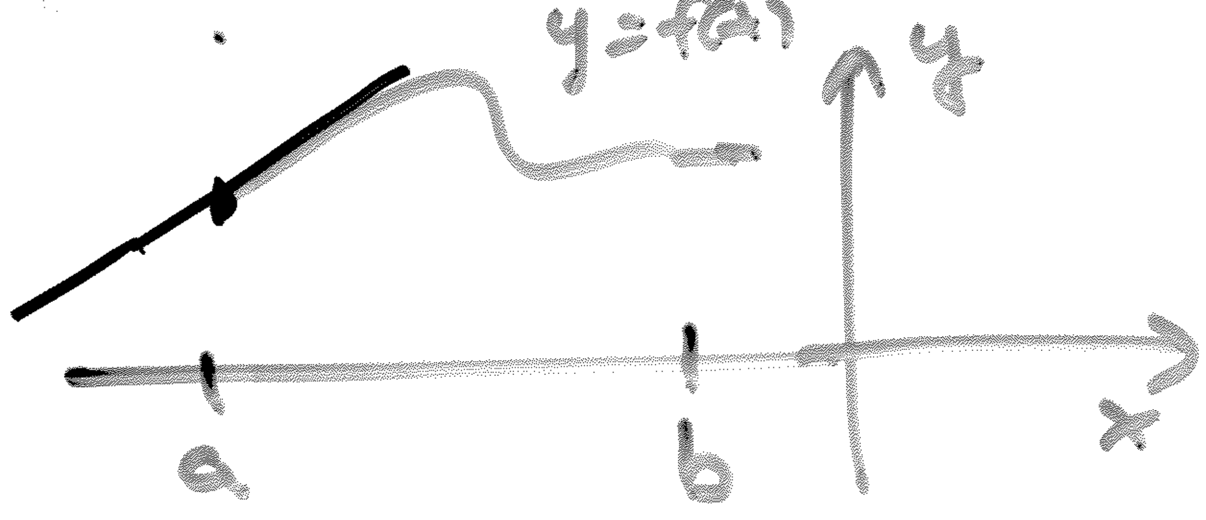
niin tällöin f saavuttaa paikallisen maksimin pisteessä x_0.

(ii) Sama väite pätee paikallisen minimin tapauksessa, kunhan merkit $<$ ja $>$ vaihtavat yllä paikkaansa.

Huom: f on edellä derivoituva osaväleille (a, x_0) ja (x_0, b) mutta ei välttämättä pisteessä x_0.

Lause: Olkoon f jatkuva välin $[a, b]$ päätepisteessä x_0. ($x_0 = a$ tai b), $a \le b$

(i) jos $f'(x) > 0$ jollain avoimella välillä (a, c) (jollain $c < b$), niin tällöin a on f:n paikallinen minimi



(ii) jos $f'(x) < 0$ jollain avoimella välillä (a, c) jossa $c < b$, niin tällöin a on f:n paikallinen maksimi.

Huom: On olennaista, että f on jatkuva välillä $[a, b]$. Muuten f voisi tehdä villin hypyn pisteessä a, jota ei voisi havaita tutkimalla $f'(x)$:n etumerkkiä kun $x > a$.

Huom! Välin oikea päätepiste b käsitellään analogisella tavalla — ohitetaan.

Funktioista, jotka eivät ole määritelty suljetulle, rajoitetulle välille

Oletetaan että $D(f) = (a,b)$ jossa $a < b$; $-\infty < a$, $b <$

Lause: Jos f on j-va välillä (a,b), ja lisäksi

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \quad \exists$$

ja

$$\lim_{x \to b-} f(x) = R \quad \exists.$$

Jos on olemassa $u \in (a,b)$ siten että

$$f(u) > L \text{ ja } f(u) > R$$

niin tällöin f saavuttaa maksimin jossain $x_0 \in (a,b)$

Perustelu: Laajennetaan f:n määrittelyjoukkoa: Määritellään $\tilde{f}$ siten että

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} L & \text{jos } x = a \\ f(x) & \text{jos } a < x < b \\ R & \text{jos } x = b. \end{cases}$$

Tällöin $\tilde{f}(x)$ on jatkuva suljetulla, rajoitetulla välillä $[a,b]$ $\overset{\text{Lause}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ absoluuttinen maksimi $x_0 \in [a,b]$ funktiolle $\tilde{f}$. Tämä piste x_0 toteuttaa

$$\tilde{f}(x_0) \geq \tilde{f}(u) > \max(L, R) = \max(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b))$$

Josta seuraa että $x_0 \neq a$ ja $x_0 \neq b$. Siis $x_0 \in (a,b)$ ja siellä $\tilde{f}(x_0) = f(x_0)$, joten x_0 on f:n globaalinen maksimi. ■

Konveksit ja konkaavit funktiot

convex $\hat{=}$ konveksi

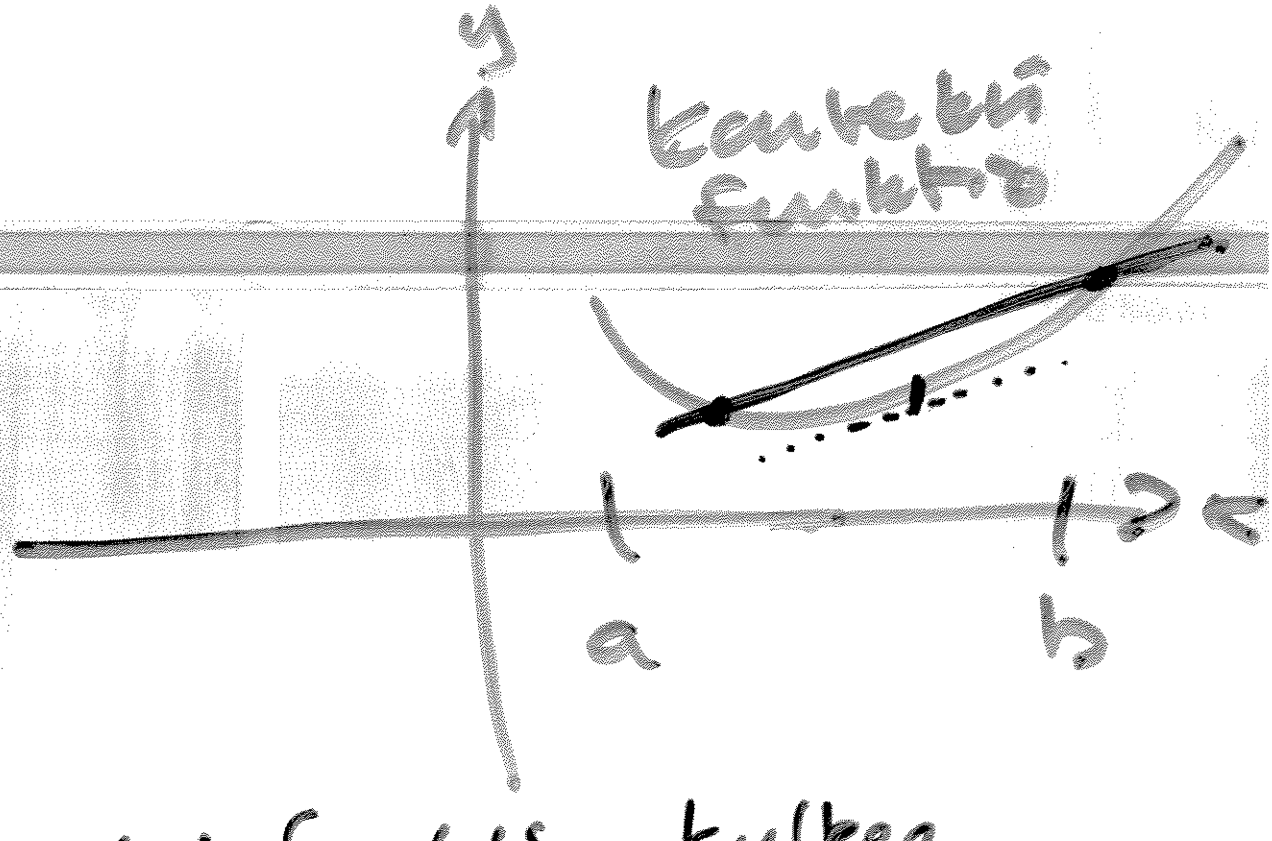
$\hat{=}$ convex up
concave up

concave $\hat{=}$ konkaavi

$\hat{=}$ concave down.

Määr: Funktio f on avoimella välillä (a,b) konveksi jos f on ~~[illegible]~~ derivoituva (a,b):ssä sekä $f'(x)$ on kasvava funktio (a,b):ssä.

f on <u>konkaavi</u>, jos $-f$ on konveksi (eli f on derivoituva ja $f'(x)$ on laskeva)



Konveksi funktio kulkee sekanttinsa alapuolella. Tässä valitaan joskus konveksifunktion määrit.

Lause: Olkoon f kaksi kertaa derivoituva välillä (a,b).

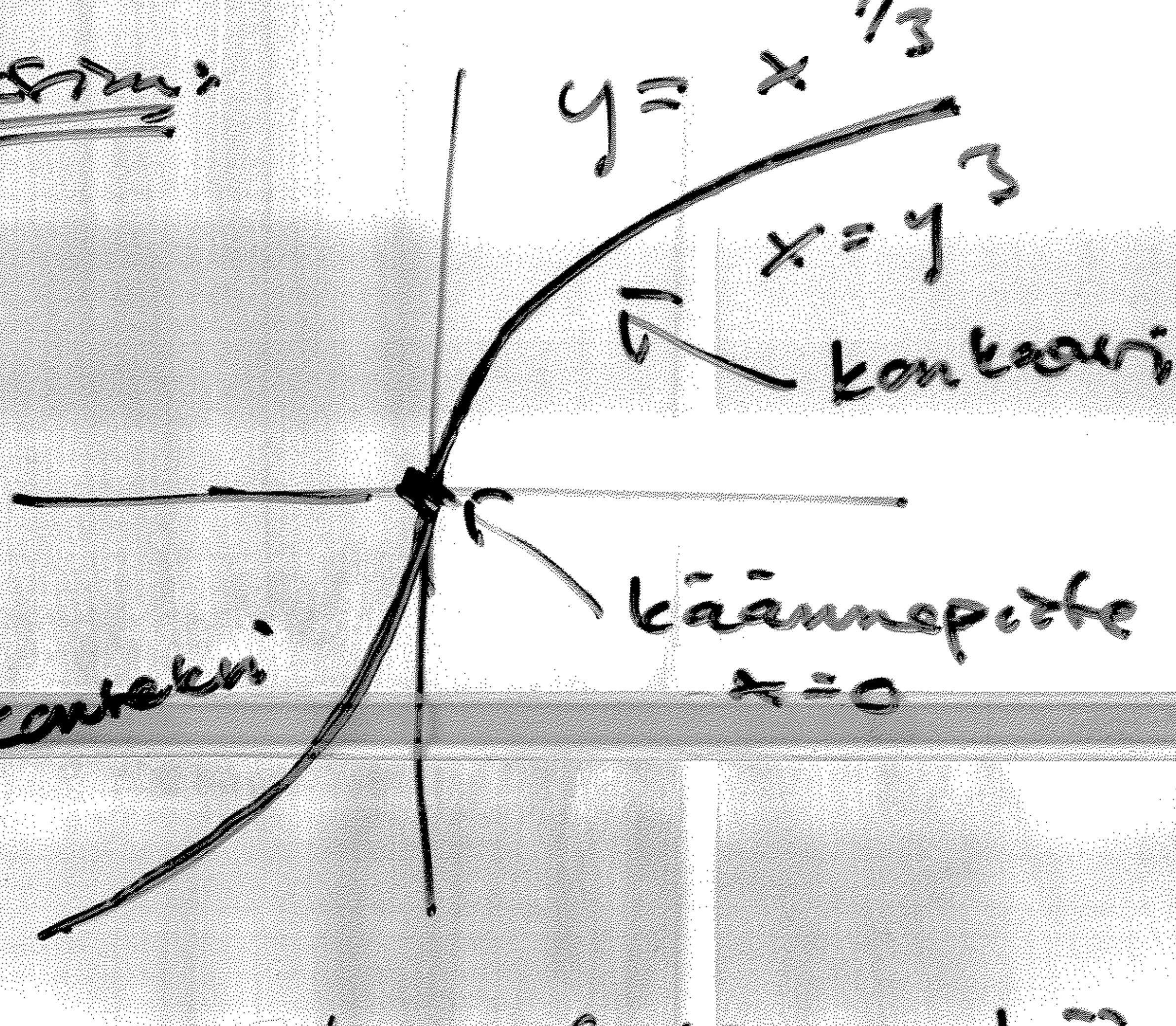
- jos $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$ niin tällöin f on konveksi välillä (a,b).
- jos $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$ niin tällöin f on konkaavi välillä (a,b).

Perustelu: Tutkimalla f'':n etumerkkiä, saadaan ehto (väliarvolauseen nojalla) sille, milloin $f'(x)$ on kasvava / laskeva. ∎

Määr: Olkoon f kaksi kertaa derivoituva. Piste $x_0 \in (a,b)$, $(D(f) = (a,b))$ on f:n käännepiste jos f on välillä (a, x_0) konveksi / konkaavi ja

Jos f on välillä (x_0, b) konkaavi / konveksi.
(l. konveksi funktio muuttuu konkaaviksi pisteessä x_0 tai päinvastoin)

Esim:



Lause: Jos f:llä on käännepiste pisteessä $x_0 \in (a, b)$, ja lisäksi $f''(x_0)$ on olemassa, niin tällöin $f''(x_0) = 0$.

Perustelu ohitetaan.

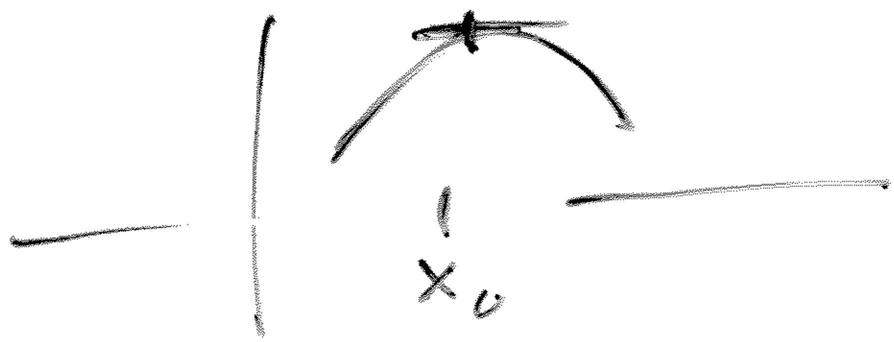
Toisen derivaatan käyttö ääriarvopisteen luokittelussa

Lause:

(i) jos $f'(x_0)=0$ (kriittinen piste) ja $f''(x_0)<0$, niin tällöin f:llä on paikallinen maksimi pisteessä x_0.

(ii) jos $f'(x_0)=0$ ja $f''(x_0) \geq 0$, niin f:llä on paikallinen minimi pisteessä x_0.

Perustelu: jos $f''(x_0)<0$, niin funktion käytös olisi x_0:n ympäristössä konkaavia:



Siis välttämättä kysymys on maksimista.