9.11.2006

1. kertaluvun Differentiaaliyhtälösysteemien stabiilisuudesta ja resonansseista

Tarkastellaan DY:ä (tai itseasiassa alkuarvotehtävää)

$$(*) \begin{cases} \bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) & t \geq 0 \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

Tässä A on nxn-matriisi.

Päästäksemme tutkimaan systeemin (*) resonanssejä niiden vahvistumista ja vaimenemista kun $t \to \infty$, tutkimme A:n ominaisarvoja.

Oletetaan että $A_{n \times n}$ on diagonalisoituva; oletetaan jopa että A:lla on n. kpl erisuuria ominaisarvoja

$$\lambda_1, \ldots \lambda_n.$$

Tällöin vastaavien ominaisvektoreiden avulla saadaan yhtälöt $(j = 1, \ldots, n)$

$$A \bar{x}_j = \lambda_j \bar{x}_j.$$

Muista että $\bar{x}_j \neq \bar{0}$!

Lineaarialgebran lause:

Eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit lin. vapaita

$\Rightarrow \{\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n\}$ on lin. vapaa

$\Rightarrow \{\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n\}$ on avaruuden

$\mathbb{C}^n$ (n-dim. pystyvekt.) avaruus

kanta; jokainen $\mathbb{C}^n$:n vektori $\bar{x}_0$ voidaan esittää muodossa

(**) $\bar{x}_0 = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \dots + c_n\bar{x}_n$

yksikäsitteisellä joukolla skalaareja $(c_1, c_2, \dots, c_n)$.

<u>Erityisesti</u>: Alkuarvotehtävän (*) alkuarvo $\bar{x}_0$ voidaan kirjoittaa muodossa (**).

Ratkaisu on nyt

$$\bar{x}(t) = e^{tA}\bar{x}_0$$
$$= c_1 \cdot e^{tA}\bar{x}_1 + c_2 e^{tA}\bar{x}_2 + \dots$$
$$+ \dots + c_n e^{tA}\bar{x}_n .$$

Mitä on $e^{tA}\bar{x}_j$, jos $A\bar{x}_j = \lambda_j \bar{x}_j$?

$$e^{tA}\bar{x}_j =$$

$$\left(\bar{x}_j + (tA)\bar{x}_j + \frac{t^2A^2}{2!}\bar{x}_j + \frac{t^3A^3}{3!}\bar{x}_j + \dots\right)$$

$$= \left(\bar{x}_j + t\cdot\lambda_j\bar{x}_j + \frac{t^2}{2!}\lambda_j^2\bar{x}_j + \frac{t^3\lambda_j^3}{3!}\bar{x}_j + \dots\right)$$

$$= e^{t\lambda_j}\bar{x}_j$$

Koska $A^2\bar{x}_j = A(\lambda_j\bar{x}_j) = \lambda_j A\bar{x}_j = \lambda_j^2\bar{x}_j$ ja samoin $A^k\bar{x}_j = \lambda_j^k\bar{x}_j$ kaikille $k \in \mathbb{N}$.

Lause: Jos $\bar{x} \neq 0$ on A:n ominaisvektori ja $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, niin tällöin $\bar{x}$ on myös matriisin e^{tA} ominaisvektori ominaisarvolla $e^{t\lambda}$ kaikilla $t \in \mathbb{C}$.

(Eksponenttifunktion "spektraalikuvauslause")

Jatkamalla aikaisempaa argumenttia saadaan

$$(**) \quad \bar{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} \bar{x}_j$$

jossa c_j:t määräytyvät yhtälöstä $(**)$.

On siis myös tarkasteltava näitä komponentteja. $e^{\lambda_j t} \bar{x}_j$

Sn

jotta $\bar{x}(t)$ konstruk.

① Jos $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|e^{\lambda t}\bar{x}_\delta| \xrightarrow{t\to\infty} \begin{cases} \infty & \text{jos } \lambda > 0 \\ 0 & \text{jos } \lambda < 0 \\ |\bar{x}_\delta| & \text{jos } \lambda = 0 \end{cases}$$

Liepanov stabiilisuus

1. tapaus: epästabiili käyttäytymalli amiraus-vektorin $\bar{x}_\delta$ suunnassa.

2. tapaus: asymptoottisesti l. vahvasti stabiili

3. tapaus: stabiili vaan ei vahvasti.

② Entä jos $\lambda = \sigma + i\omega$ jossa $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$?

Tällöin Eulerin kaavalla

$$e^{t(J+i\omega)}\bar{x}_0$$

$$= e^{tJ}(\cos\omega + \bar{i}\sin\omega)\bar{x}_0$$

jossa

$$|e^{t(J+i\omega)}\bar{x}_0|$$

$$= e^{tJ}|\bar{x}_0|$$

koska $\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$.

Nyt pätee sama analyysi kuin puhtaasti reaalisen λ:n tapauksessa.

Systeemin (*) epästabiilisuudelle on riittävä ehto se, että yksikin summan (***) termeistä kasvaa epästabiilisti.

Stabiilin, jopa <u>robustisti</u> stabiilin käytöksen päästään, jos jokaisen ominaisarvon λ_j reaaliosa on negatiivinen.

Ts. $\lambda_j \in \mathbb{C}_- \quad \forall j=1,\dots,n$

jossa $\mathbb{C}_- = \{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s < 0 \}$

Insinööri slangilla:

"navat ovat vasemmassa puolitasossa"

Mitkä λ_j:t ovat "napoja" selviää Laplace-muunnoksen yhteydessä.

Esim: Tutki yhtälön $\bar{x}' = A\bar{x}$ stabiilisuutta jossa $A = \begin{bmatrix} -17 & 7 \\ -42 & 16 \end{bmatrix}$.

Voiko alkuehdon $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ määrätä siten että vastaava ratkaisu $e^{tA}\bar{x}_0$ on stabiili?

Diagonalisointi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -17 & 7 \\ -42 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Määritellään funktio

$$\bar{y}(t) := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \bar{x}(t)$$

jossa $\bar{x}(t)$ ratkaisee

$$(*) \quad A\bar{x}(t) = \bar{x}'(t).$$

Kysymys: Jos $\bar{x}(t)$ ratkaisee (*):n, niin mikä on se DY, jonka $\bar{y}(t)$ ratkaisee?

$\forall t$

$$\bar{0} = \bar{x}'(t) - A\,\bar{x}(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bar{y}'(t) - \overbrace{\begin{bmatrix} -19 & 7 \\ -42 & 16 \end{bmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bar{y}(t)}^{\bar{x}(t)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \left(\bar{y}'(t) - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -19 & 7 \\ -42 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bar{y}(t) \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\left(\bar{y}'(t) - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \bar{y}(t) \right)}_{\equiv \bar{0} \ \forall t}$$

3.1.5

$$(**)\quad \bar{y}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \bar{y}(t)$$

Jos $\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$,

niin yhtälö (**) on

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2y_1(t) \\ -5y_2(t) \end{bmatrix}$$

Siis saatiin kaksi skalaari yhtälöä

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) \\ y_2'(t) = -5y_2(t) \end{cases}$$

jotka ovat toisistaan

riippumattomia:

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{2t} y_1(0) \\ y_2(t) = e^{-5t} y_2(0) \end{cases}$$

jossa

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}}^{\bar{x}(0)}$$

__Siis:__ Diagonalisointi purkaa kytkennät yhtälöiden välillä!

__Esim.__ Ihmisen ääniväylä.