8.11.2006

Lineaariset differentiaaliyhtälösysteemit

2×2 tapauksessa

$$(*)\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}\, x_1(t) + a_{12}\, x_2(t) \\ x_2'(t) = a_{21}\, x_1(t) + a_{22}\, x_2(t) \end{cases}$$

eli matriisimuodossa:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}'(t) \equiv \frac{d\bar{x}}{dt}(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$$

Välihuom: Vektoriarvoisen funktion derivaatalla on järkevä määritelmä

$$\lim_{h\to 0} \frac{\bar{x}(t+h) - \bar{x}(t)}{h} =: x'(t)$$

jolloin

Nyt $\forall h \neq 0$ pätee

$$\frac{\bar{x}(t+h) - \bar{x}(t)}{h}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} x_1(t+h) \\ x_2(t+h) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}{h}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h} \\ \frac{x_2(t+h) - x_2(t)}{h} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h \to 0} \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan kirjoittaa

$$\bar{x}'(t) = A\,\bar{x}(t)$$

jossa $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$

Tulkinta hajoamislain avulla: Kaksi isotooppia joiden hajoamislait ovat

$$x_1'(t) = a_{11} x_1(t)$$

$$x_2'(t) = a_{22} x_2(t)$$

Koska $x_1(t)$-isotoopin hajotessa syntyvät neutronit hajottavat ylimääräisiä hajoamisia x_2:n isotoopissa, niin pitää lisätä termi $a_{12} x_2(t)$ ylempään yhtälöön — tilanne symmetrinen isotooppien kesken.

<u>Ergo</u>: Pelkästään skalaariarvoisten 1. kl. systeemien ratkaisu ei riitä käytännön sov:ssa.

Korkeamman kertaluvun skalaariyhtälöiden palauttaminen 1. kl. vektoriyhtälöiksi

Tarkast. DY:ä

$$(**)\quad x^{(n)}(t) + p_{n-1}\, x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1\, x'(t) + p_0\, x(t) = f(t)$$

Määritellään vektorifunktio

$$\bar{x}(t) = \left.\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}\right\} n \text{ kpl}$$

jossa $x(t)$ ratkaisee (**):n.

$$\frac{d\bar{x}}{dt}(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \\ -p_{n-1}x^{(n-1)}(t) - p_{n-2}x^{(n-2)}(t) \cdots - p_1 x'(t) - p_0 x(t) + f(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & \cdots & & -p_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$= A\bar{x}(t) + \bar{F}(t)$$

Siis

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix}$$

on muodoltaan nk. <u>kumppanimatriisi</u>

<u>Huom</u>: Usein tarvitaan yhtälöitä

$$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{f}(t)$$

jossa A <u>ei</u> ole <u>kumppanimatriisi</u> ja $\bar{F}(t)$:n $n-1$ 1. komponenttia ei nollia.

Entä jos A on <u>kumppanimatriisi</u> ja $\bar{F}(t) = [0 \;—\; 0 \;\; f(t)]^T$?

Tällöin edellä oleva argumentti voidaan toiseen suuntaan:

jos $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix}$

on ratkaisu yhtälölle

$$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{F}(t)$$

(jossa A kumpp. ja $\bar{F}(t)$ kuten edellä)

niin saadaan suoraan

$$\begin{bmatrix} x_0'(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ -p_0 x_0(t) - p_1 x_1(t) \\ - \cdots - p_{n-1} x_{n-1}(t) \\ + f(t) \end{bmatrix}$$

Jos $x(t) = x_0(t)$, niin ~~tällöin~~ $x^{(k)}(t) = x_k(t)$!

Lopulta ahin vaakariviä antaa – sijoittamalla $x^{(k)}(t) = x_k(t)$, $k = 1, \dots, n-1$ – takaisin skalaari diff-yhtälön (**).

Tässä on siis todellakin 1-1 – vastaavuus

Esim: RLC-piirissä kulkevalle virralle johdetaan DY

$$L\, i''(t) + R\, i'(t) + \frac{1}{C}\, i(t) = e'(t)$$

jossa $i(t)$ on piirissä kulkeva virta, ja $e(t)$ on SMV.

Valitaan tilamuuttujiksi $i(t)$ ja $i'(t)$:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ i'(t) \end{bmatrix}$$

On mallissamme tilatrajektori joka liikkuu RLC-piiriä kuvaavan systeemin 2-ulotteisessa tila- eli faasiavaruudessa.

$$\frac{d\bar{x}}{dt}(t) = \begin{bmatrix} i'(t) \\ i''(t) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} i(t) \\ i'(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}}_{\bar{F}(t)}$$

Saatiin malli RLC-piirille muotoa

$$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{F}(t).$$

Tilamuuttujat voidaan valita monella eri tapaa mutta niitä tarvitaan jokaisessa oikeassa mallissa yhtä monta.

Toinen tapa valita tila-muuttujat:

$$\begin{cases} u_c'(t) = \frac{1}{C} i(t) \\ i'(t) = -\frac{1}{L} u_c(t) - \frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} e(t) \end{cases}$$

joka antaa tuloksen mallin

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} e(t) \end{bmatrix}.$$

Vektoriarvoisen 1. kertaluvun systeemin ratkaisu

Homogeeninen tapaus:

$$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$$

jossa $\bar{x}(t)$ on n-pystyvektori ja A on $n \times n$-matriisi.

Yritetään tulkita muodollinen kaava

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}(0)$$

"oikealla" tavalla; mitä tarkoittaa e^{At}?

Määritellään matriisin At eksponenttifunktio Taylorin sarjan avulla (kuten jo on tehtykin):

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots$$

Jos uskotaan tähän sarjaan, ja että sillä voidaan operoida "termeittäin", niin saadaan

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\bar{x}(0)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(\bar{x}(0) + t\cdot \overbrace{A\bar{x}(0)}^{\text{vektori}} + t^2\cdot\frac{A^2\bar{x}(0)}{2!} + t^3\cdot\frac{A^3\bar{x}(0)}{3!} + t^4\cdot\frac{A^4\bar{x}(0)}{4!} + \ldots\Big)$$

$$= A\bar{x}(0) + t\,\frac{A^2\bar{x}(0)}{1!} + t^2\cdot\frac{A^3\bar{x}(0)}{2!} + t^3\,\frac{A^4\bar{x}(0)}{3!} + \ldots$$

$$= A\Big(\bar{x}(0) + t\,\frac{A\bar{x}(0)}{1!} + t^2\,\frac{A^2\bar{x}(0)}{2!} + t^3\,\frac{A^3\bar{x}(0)}{3!} + \ldots\Big)$$

$$= A\cdot e^{At}\bar{x}(0)$$

Katsomalla edellisen yht. päätä ja häntää todetaan että $\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}_0$

niin tällöin $\bar{x}(t)$ toteuttaa alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

Oikeastaan haluamme ratkaista epähomogeenisia systeemejä $(t \geq 0)$

$$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{F}(t).$$

Tämä ratkaistu tulee myös vakioiden variointi kaavalla kunhan e^{At} - funktio määritellään kuten edellä:

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-v)}\bar{F}(v)\,dv$$

Kuinka lasketaan?

1. Jos A on diagonalisoituva (ja tällä kurssilla aina on) niin $A = VDV^{-1}$, jolloin

$$At = V \cdot (Dt) \cdot V^{-1}$$

ja

$$e^{At} = V e^{Dt} V^{-1}$$

jossa Dt on diagonaalimatriisi

$$Dt = \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 t & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n t \end{bmatrix}$$

jossa $\{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}$ ovat A:n ominaisarvot.

2. Integraali vektoriarvoisesta funktiosta

$$\tau \longmapsto e^{A(t-\tau)} \bar{F}(\tau)$$

laskitaan komponenteittain:

$$\int_0^t \begin{bmatrix} x_1(v) \\ x_2(v) \end{bmatrix} dv \equiv \begin{bmatrix} \int_0^t x_1(v)\,dv \\ \int_0^t x_2(v)\,dv \end{bmatrix}$$

Integraalien laskeminen voi olla mahdotonta; tällöin jäädään numeerisiin menetelmiin.

Mutta onko vakioiden variointikaava oikein? Että vakioiden variointikaava todellakin antaa DY:n ratkaisun skalaaritapauksessa oli DEMO-TEHTÄVÄNÄ!

Täysin sama argumentti toimii vektori - matriisi - tapauksessa. Tarkista itse.