7.11.2006

n. kertaluvun epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu

Tutkitaan DY:ä

$$(*) \quad x^{(n)}(t) + p_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1 x'(t) + p_0 x(t) = f(t)$$

Tällä yhtälöllä on yleisen ratkaisun lauseke, joka sisältää n kpl. vapaita parametreja:

$$(**) \quad x_{\bar{Y}}(c_1 \ldots c_n; t).$$

Lause: Yhtälön (*) yleinen ratkaisu (**) saadaan lisäämällä 1.

Vastaavan homogeenisen yhtälön

$$(**)\quad x^{(n)}(t) + p_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots$$

$$\dots + p_1 x'(t) + p_0 x(t) = 0$$

yleisen ratkaisun lauseke-keeseen $x_{Y,h}(c_1, \dots c_n; t)$ mielivaltainen epähomog. yhtälön (*) yksityisratkaisu $x_p(t)$. Ts.

$$x_{Y}(c_1, \dots, c_n; t) \doteq$$

$$x_{Y,h}(c_1, \dots c_n; t) + x_p(t).$$

<u>Perustelu:</u> Otetaan käyttöön <u>differentiaali operaattori</u>

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt} + b$$

koska aion tarkastella
2. kl. yhtälöä

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = f$$

(yleinen tapaus seuraa aivan samaa logiikkaa.)

Jos $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$, niin

$$Lf = \left(\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt} + b\right)f$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}f + a\frac{d}{dt}f + bf$$

$$= f'' + af' + bf.$$

(vrt. $\underline{L} \hat{=}$ matriiseja ja
$\underline{f} \hat{=}$ vektoreita!)

L on lineaarinen kuvaus

$C^2(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$:

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$$

k.a. f, g

Näin voidaan kirjoittaa epähomog. yhtälö

$$(*) \qquad LX = f$$

ja homogeeninen

$$(**) \qquad Lx = 0.$$

1. Olkoon $x_p(t)$ DY:n $(*)$ yksityisratkaisu, ja

$$x_{Y,h}(t) = C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t)$$

DY:n $(**)$ yleinen ratkaisu.

Tällöin

$$L(x_p + x_{Y,h})$$

$$= \underbrace{Lx_p}_{=f} + \underbrace{Lx_{Y,h}}_{=0} = f.$$

Siis: Lauseke

$$x_Y(C_1, C_2; t) := x_{Y,h}(C_1, C_2; t) + x_p(t)$$

on

on tosiaankin DY:n (*) ratkaisu kaikilla $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

2. Jos toisaalta $x(t)$ on eräs DY:n (*) ratkaisu, niin saadaan

$$L\left(x(t) - x_p(t)\right) = (L\underbrace{x}_{=f})(t) - (L\underbrace{x_p}_{=f})(t)$$

$$\left(L(x-x_p) = Lx - Lx_p \right)$$

$$= f(t) - f(t) = 0$$

siis $x(t) - x_p(t)$ on homog. yhtälön $\binom{**}{=(*)}$ eräs ratkaisu, joten se voidaan esittää muodossa

$$x(t) - x_p(t) = C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t)$$

eräillä vakioiden C_1, C_2 arvoilla

Siis:

$$x(t) = x_p(t) + x_{y,h}(c_1, c_2; t)$$

ja tosiaankin, koska $x(t)$ oli mielivaltainen, niin

$$x_y(t) \equiv x_p(t) + \Sigma_{y,h}(t)$$

Kelpaa yleiseksi ratkaisuksi (jonka avulla kaikki ratkaisut voidaan määrätä).

<u>Esim:</u> Etsi yleinen ratkaisu <u>DY:lle</u>

$$x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = \sin t, \quad t \geq 0.$$

Karakteristisen polynomin

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

antaa nollakohdiksi

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 + i \\ \lambda_2 = -2 - i \end{cases}$$

Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu

$$x_{I,h}(C_1, C_2; t) = e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Pitää jostain "nyppiä" $x_p(t)$ – epähomog. yhtälön yksittäisratkaisu ..... ——— .... ——

Fysikaalinen intuitio + maalaisjärki.

Tehdään Ansatz:

$$x_p(t) = D_1 \sin t + D_2 \cos t$$

$$\left(\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \right] = -\sin(t - \pi/2)$$

$$x'_p(t) = D_1 \cos t - D_2 \sin t$$

$$x''_p(t) = -D_1 \sin t - D_2 \cos t$$

Nyt

$$x''_p(t) + 4x'_p(t) + 5x_p(t)$$

$$= (-D_1 - 4D_2 + 5D_1)\sin t$$

$$+ (-D_2 + 4D_1 + 5D_2)\cos t$$

$$\equiv \sin t \qquad \forall t \geq 0.$$

Saadaan

$$\begin{cases} 4D_1 - 4D_2 = 1 \\ 4D_1 + 4D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = \frac{1}{8} \\ D_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Etsittty yksityisratkaisu on

$$x_p(t) = \frac{1}{8}(\sin t - \cos t)$$

joten

$$x_{y}(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \frac{1}{8}(\sin t - \cos t).$$ ■

<u>Toinen esim:</u>

$$x''(t) - 6x'(t) - 16x(t) = t^3 \quad \forall t \geq 0$$

Etsi yleisen ratkaisun lauseke.

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 8 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$x_{y,h}(t) = C_1 e^{8t} + C_2 e^{2t}$$

Yksittäisratkaisu epähom. yhtälölle?

- Polynomien derivaatat, antiderivaatat polynomeja

$\Rightarrow x_p(t)$ on polynomi

- Polynomin aste laskee yhdellä deriv.

$\rightarrow x_p(t)$ on 3. asteen polynomi.

Tehdään Ansatz:

$$x_p(t) = D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3$$

$$x'_p(t) = D_1 + 2D_2 t + 3D_3 t^2$$

$$x''_p(t) = 2D_2 + 6D_3 t$$

Sijoittamalla

$$x_p''(t) - 6x_p'(t) - 16x_p(t)$$

$$= (2D_2 - 6D_1 - 16D_0)$$

$$+ (6D_3 - \underbrace{12D_2}_{=-2} - 16D_1)t$$

$$+ (-18D_3 - 16D_2)t^2$$

$$+ 16D_3 t^3$$

$$\equiv t^3 \quad \forall t$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & -16 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & -16 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_3 \\ D_2 \\ D_1 \\ D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jollain konstilla:

$$D_3 = \frac{1}{16},\ D_2 = -\frac{9}{128},$$

$$D_3 = \frac{37}{512},\ D_4 = -\frac{153}{4096}.$$

Tästä saadaan yleinen ratk. lauseke.

<u>Esim:</u>

$$x''(t) + 2x'(t) + 3x(t) = e^t$$

Yrite $x_p(t)$:lle?

Se olisi sellainen jotain sellaista kuin ce^t jne.

<u>Esim:</u>

$$x''(t) + 2x'(t) = 5$$

kaytetaan polynomiyritettä,

$$(x^2(t) + 2x)^2 = 5$$

Ⓗ.

$$x'(t) + 8x(t) = 5t + C$$

Tämä voitaisiin ratkaista joko 1 asteen polynomi-yritteellä tai "vakioiden variointitavalla".

Kuormitettu harmoninen värähtelijä

Tämä vastaa edellä sanotun perusteella alkuarvotehtävää

$$\begin{cases} x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = f(t) \\ x'(0) = v_0, \quad x(0) = x_0. \end{cases}$$

Kaksi alkuehtoa määrää

epähomog. yhtälön yleiseen lausekkeeseen $x_y(C_1, C_2; t)$ vapaat parametrit C_1 ja C_2.

Esim.

$$\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = \sin t \\ x'(0) = 0 \quad \text{ja} \quad x(0) = 1 \end{cases}$$

$$x_y(t) = \frac{1}{8}\sin t - \frac{1}{8}\cos t + e^{-2t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right).$$

ja

$$x_y'(t) = \frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t - 2e^{-2t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) + e^{-2t}\left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\right).$$

Sijoittamalla $t = 0$

$$\underline{x}_{\underline{y}}(0) = -\frac{1}{8} + C_1 = 0$$

$$\underline{x}_{\underline{y}}'(0) = \frac{1}{8} - 2C_1 + C_2 = 1$$

ts.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

josta C_1 ja C_2 ratkeavat. ∎

1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemeihin

Vito Volterra, 1900-luvun alusta.

$S(t)$ muikkupopulaation koko hetkellä t (saalis)

$P(t)$ haukipopulaation koko (peto)

Jos muikut saisivat elää rauhassa ja ikuisesti

$$S'(t) = a\,S(t)$$

$$\Rightarrow S(t) = e^{at} S(0)$$

<u>Mutta</u>: Hauki on,

$$S'(t) = a\,S(t) - b\,\underbrace{S(t)P(t)}_{\text{syömisten luku}}$$

jossa $b > 0$.

($a \geq 1$ koska muikut haluavat täyttää maan)

Jos ei ehdi muikkuja, niin "hajoaisivat" sukupuuttoon

$$p'(t) = -c\,p(t)$$

jossa $c > 0$; ts.

$$p(t) = e^{-ct}\,p(0).$$

Koska muikkuja on, hauet kuolevat sukupuuttoon hitaammin. (ei ehkä lainkaan!)

$$p'(t) = -c\,p(t) + d\,s(t)\,p(t)$$

Saadaan differentiaaliyhtälöpari :

$$\begin{cases} s'(t) = a\,s(t) - b\,s(t)p(t) \\ p'(t) = -c\,s(t) + d\,s(t)p(t) \\ p(0) = p_0, \quad s(0) = s_0 \end{cases}$$

Tällä alkuarvotehtävällä on yksikäsitt. ratkaisu

Yhtälöryhmä on epälineaarinen, koska kytkentätermi $s(t)p(t)$ ei ole summa ratk. $s(t)$ ja $p(t)$ skalaarimonikerroista

$\Rightarrow$ analyysi vaikeaa, jopa tarkka ratkaisu mahdotonta

$\Rightarrow$ Tietokoneella

lasketaan numeerisesti.

Esim MATLAB ohjelmalla.

→ Uks tulee <u>hyvin karotinen</u> p ja s-populaatioiden aika-kehitys!