2.11.2006

Konjugaattisten karakt. polynomin nollakohtien yhdistely trigonometrisiksi funktioiksi

Jos DY:n

$$x^{(n)} + p_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + p_1 x' + p_0 x = 0$$

kertoimet $p_0 \dots p_{n-1}$ ovat reaalisia, niin tällöin jokainen karakt. pol. kompl. nollakohta esiintyy kompleksikonjugaattinsa kanssa.

Esimerkkinä tarkastellaan

$$x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 0$$

jonka karakt. pol. on

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 3) =$$
$$(\lambda - 1 - i\sqrt{2})(\lambda - 1 + i\sqrt{2})$$

jossa

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 + i\sqrt{2} \\ \lambda_2 = 1 - i\sqrt{2} \end{cases}$$

ovat etsityt ratkaisut. Yleinen ratkaisu on

$$x_{\xi}(c_1, c_2; t) = c_1 e^{(1+i\sqrt{2})t} + c_2 e^{(1-i\sqrt{2})t}$$

$$= e^t \left(c_1 e^{i\sqrt{2}t} + c_2 e^{-i\sqrt{2}t} \right)$$

jossa parametrit c_1 ja c_2 ovat mielivaltaisia mahd. kompleksisia lukuja.

Eulerin kaavat:

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \\ \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

Voidaan eliminoida $e^{\pm i\sqrt{2}t}$ funktiot pois yleisen ratkaisun lausekkeesta:

$$e^t\left[c_1(\cos\sqrt{2}t + i\sin\sqrt{2}t) + c_2(\cos\sqrt{2}t - i\sin\sqrt{2}t)\right]$$

$$= e^t\left[(c_1+c_2)\cos\sqrt{2}t + i(c_1-c_2)\sin\sqrt{2}t\right]$$

$$= e^t\left[c_1'\cos\sqrt{2}t + c_2'\sin\sqrt{2}t\right]$$

jossa

30

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Siis vapaat parametrit voitiin korvata uusilla vapailla param. c_1' & c_2'; nyt yleinen ratkaisu on myös muotoa

$$x_L(c_1', c_2'; t)$$

$$= e^{t}\left(c_1' \cos \sqrt{2}\, t + c_2' \sin \sqrt{2}\, t \right).$$

Tämä on <u>reaaliarvoinen</u> funktio jos ja vain jos $c_1', c_2' \in \mathbb{R}$.

<u>Huom</u>: Kitkatermissä oli $-2j$; siksi ratkaisut kasvavat kuten e^{t} kun $t \to \infty$.

n. kertaluvun alkuarvotehtävä

Jokaisella n. kertaluvun lin. vakiokert. DY:llä on ääretön määrä ratkaisuja — siksi se ei sinällään sovellu fysikaalisen tilanteen malliksi.
Tämän takia tarvitaan ns. <u>alkuarvotehtävä</u>:

$$(*) \begin{cases} x^{(n)} + p_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + p_1 x' + p_0 x = 0 \quad \text{kun } t \geq 0 \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1},\ x^{(n-2)}(0) = x_{n-2} \\ \dots\ x'(0) = x_1,\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Tarvitaan n. kpl alkuehtoja, jotta n-ulott., yleisen ratkaisun lausekkeen määräämättä vektori

ξ_0

avaruudesta saadaan valittua tasan 1 alkuarvotehtävään (*) ratkaisu.

Esim:

$$(**)\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 0 & t \geq 0 \\ x'(0) = 1, \quad x(0) = 2 \end{cases}$$

Tiedetään että (**) ratkaisu on

$$x(t) = e^{t}(c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t)$$

eräillä $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

$$x'(t) = e^{t}(c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t) + e^{t}\cdot(-\sqrt{2}c_1 \cdot \cos\sqrt{2}t + \sqrt{2}c_2 \sin\sqrt{2}t)$$

6a

$$= e^t \left[(c_1 + \sqrt{2}\, c_2) \cos \sqrt{2}\, t \right.$$

$$\left. + \; (\sqrt{2}\, c_1 + c_2) \sin \sqrt{2}\, t \right).$$

Käytetään alkuehtoja

$x(0) = 2 \;\Rightarrow\; c_1 = 2$

$x'(0) = 1 \;\Rightarrow\; c_1 + \sqrt{2}\, c_2 = 1.$

$\left(c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$

Alkuarvotehtävän (**) ratkaisu on siis

$$x(t) = e^t \left(2 \cos \sqrt{2}\, t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}\, t \right). \quad \blacksquare$$

Vaimennetun värähtelijän yleinen tapaus

(ilman kuormitusta)

Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$\begin{cases} m x''(t) + \mu x'(t) + k x(t) = 0 & t \geq 0 \\ x'(0) = v_0, \; x(0) = x_0 \end{cases}$$

karakteristinen polynomi

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\mu}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + \frac{\mu}{m}\lambda + \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m} - \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 = 0$$

sama

$$\Leftrightarrow \quad \left(\lambda + \frac{\mu}{2m}\right)^2 + \underbrace{\frac{k}{m} - \left(\frac{\mu}{2m}\right)^2}_{=:D} = 0$$

Riippuen diskriminantin

$$D := \frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}$$

etumerkistä, saadaan tapaukset

1. $\underline{D > 0}$. Karakt. pol. juuret ovat kompleksisia ja toistensa konjugaatteja. Yleinen ratkaisu on muotoa

$$x(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\left(C_1 \cos\sqrt{D}t + C_2 \sin\sqrt{D}t\right).$$

<u>Alivaimennettu</u> tapaus

koska jaksaa värähdellä joskin vaimenee eksponentiaalisesti

② $\underline{\underline{D=0}}$. Karakt. pol.

kaksinkertainen juuri

$$\lambda = -\frac{\mu}{2m}.$$

Yleisen ratkaisun lauseke

muotoa

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\mu}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{\mu}{2m}t}$$

$$= (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{\mu}{2m}t}$$

<u>Kriittisesti</u> <u>vaimennetun</u> tapaus; eräänlainen rajatapaus.

③ $D<0$. Karakt. pol.

kaksi reaalijuurta

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\mu}{2m} + \sqrt{\underbrace{\frac{\mu^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}_{-D > 0}} < 0 \\ \lambda_2 = -\frac{\mu}{2m} - \sqrt{-D} \end{cases}$$

ja yleinen ratkaisu

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Koska $\lambda_1 > \lambda_2$, niin ~~funktio~~ $e^{\lambda_1 t}$ dominoi

mutta koska $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ niin molemmat vaimenevat kun $t \to \infty$. ∎

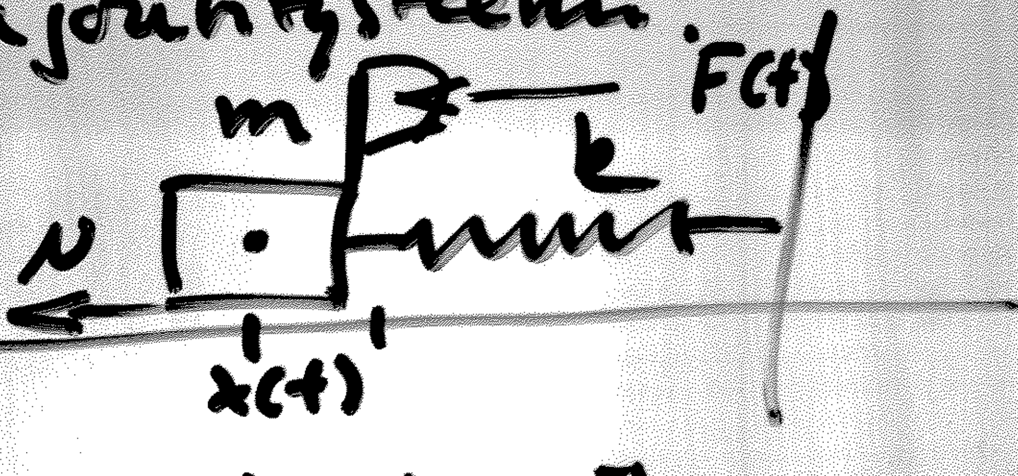
Epähomogeeninen differentiaaliyhtälö

Lin. vakiokert. DY

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1 x'(t) + p_0 x(t) = r(t)$$

on epähomogeeninen mikäli kuormafunktio $r(t)$ on aidosti $\neq 0$.

Esim: Kuormitettu massajousisysteemi.



$F(t)$ – ajasta riippuva "tuulikuorma".

Newtonin 2. lakia

$$m x''(t) = F_{\text{jousi}}(t) + F_{\text{kitka}}(t) + F(t)$$

jossa $F_{\text{jousi}}(t) = -k\,x(t)$,

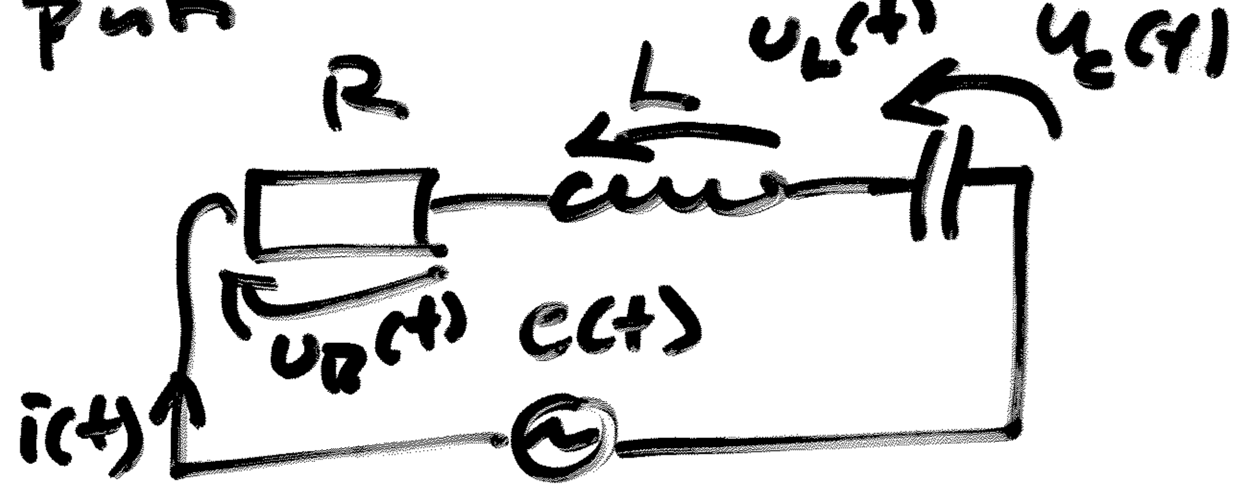
$$F_{\text{kitka}}(t) = -\mu x'(t).$$

Kasaamalla yllä olevan yhteen, saadaan

$$m x''(t) + \mu x'(t) + k x(t) = F(t).$$

Kuormatermi on jousi-massa systeemin "input-signaali".

Esim: Kuormitettu RLC-piiri



Kuinka piiri "potkaisee" takaisin ulkoiseen jännitelähteeseen $e(t)$?

Kirchhoffin jännitelaki

$$-u_R(t) - u_L(t) - u_C(t) + e(t) = 0$$

Kuten aiemmin derivoimalla ja käyttämällä resistanssin, induktanssin ja kapasitanssin lakeja

Saadaan samoin kuin aiemmin yhtälö joka pitkeas vain yhdellä termillä $e'(t)$ kuormittamattomasta tapauksesta

$$L\bar{i}''(t) + R\bar{i}'(t) + \frac{1}{C}\bar{i}(t) = e'(t).$$

Alkuehdot määräävät epähomog. alkuarvotehtävälle yksikäsitt. ratkaisun:

$$\begin{cases} L\bar{i}''(t) + R\bar{i}'(t) + \frac{1}{C}\bar{i}(t) = e'(t) \\ \bar{i}'(0) = \bar{i}_1, \quad \bar{i}(0) = \bar{i}_0 \end{cases}$$

1. kertaluvun epähomog. yhtälön yleinen ratkaisu

Malli:

$$(***)\begin{cases} x'(t) - a\,x(t) = f(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(Radioaktiivisen hajoamisen tapauksessa $f(t)$ voisi olla ulkoinen neutronivuo.)

Homogeenisen yhtälön ratkaisu oli

$$x_h(t) = C e^{at}, \quad C \in \mathbb{C}$$

Kuinka tätä funktiota tulisi muuttaa jotta $f(t) \not\equiv 0$ tulisi otettua huomioon?

Vastaus: "Varioidaan vakiota C"

Valitaan funktio $c(t)$ siten että yrite

$$x(t) = c(t)e^{at}$$

on DY:n (***) ratkaisu.

$$x'(t) = c'(t)e^{at} + c(t)\cdot a e^{at}.$$

Nyt

$$x'(t) - a x(t)$$

$$= [c'(t) + a c(t)]e^{at} - a\cdot c(t)e^{at}$$

$$= c'(t)e^{at} = f(t).$$

Ts.

$$c'(t) = e^{-at}f(t).$$

josta

$$c(t) - c(0) = \int_0^t e^{-a\tau}f(\tau)d\tau$$

Vaikka viimeistä integraalia ei aina pystytä laskemaan suljetussa muodossa, voidaan tietokoneella numeerisin menetelmin laskea $c(t)$ kullekin t mielivaltaisen tarkasti (kunhan $f(t)$ on tunnettu joko kaavan tai taulukko-arvojen l. mittausten avulla).

<u>Lause:</u> Epähomog. vakiokert. differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$x_y(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

jossa x_0 on vapaa parametri (toteuttaa $x_y(0) = x_0$)

Perustelu: Edellä

$$x(t) = C(t)\, e^{at}$$

$$= e^{at}\left(C(0) + \int_0^t e^{-av} f(v)\, dv\right)$$

$$= e^{at} C(0) + \int_0^t e^{a(t-v)} f(v)\, dv.$$