RLC-piiri

25.10.2006

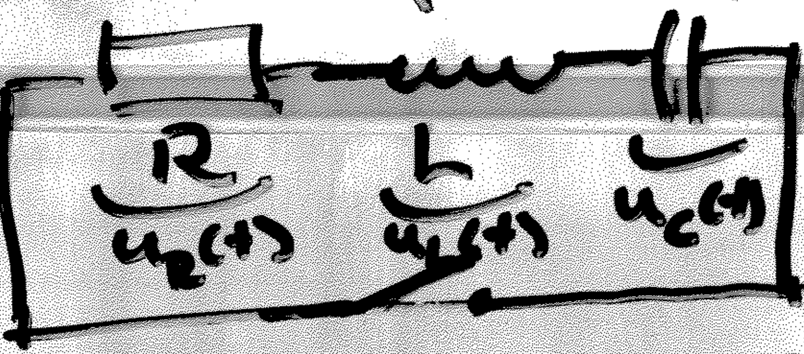
Massajousisysteemin DY:

$$m\,x''(t) + \mu\,x'(t) + k\,x(t) = 0$$

$$m, \mu, k > 0.$$

Tämä malli kuvaa fysiikassa <u>(vaimennettua)</u> <u>harmonista</u> <u>värähtelijää</u> l. <u>oskillaattoria</u>.

Ajatellaan suljettua piiriä



ilman jännitelähdettä.

Hetkellä $t=0$ piiri suljetaan kytkimellä.

Kirjoitetaan DY piirissä kulkevalle virralle kun $t>0$.

Sähköopista tiedetään kolme lakia ideaalisille resistansseille, induktansseille ja kapasitansseille:

$$u_R(t) = R\, i_R(t) \qquad \text{Ohmin laki}$$

$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau)\, d\tau$$

Toisaalta Kirchhofin jännitelaki sanoo:

Suljetussa virtasilmukassa jännitehäviöt (negatiivismerkkisenä) ja sähkömotoriset voimat (posit. merkkisenä) summautuvat nollaksi

$$-u_R(t) - u_L(t) - u_C(t) = 0$$

$$\Rightarrow -u_R'(t) - u_L'(t) - u_C'(t) = 0$$

15.

$$(*) \quad R\,\bar{i}'_R(t) + L\,\bar{i}''_L(t) + \frac{1}{C}\,\bar{i}_C(t) = 0$$

Toisaalta Kirchhoffin virtalaki sanoo

Jokaiseen virtapiirin pisteeseen tulevien virtojen nettosumma $= 0$

joten

$$i_R(t) = i_L(t) = i_C(t).$$

Yhdistämällä nämä yhtälöön (*) saadaan

$$L\,\bar{i}''(t) + R\,\bar{i}'(t) + \frac{1}{C}\,\bar{i}(t) = 0$$

jossa $\bar{i}(t)$ on virtapiirin läpi kulkeva virta.

Jokainen fysikaalisesti realistinen $R, L, C \geq 0$.

$$\boxed{L \hat{=} m, \quad R \hat{=} \mu, \quad \frac{1}{C} \hat{=} k.}$$ (5o

Lineaarisen homogeenisen vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön ratkaisu

D4

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}\, x^{(n-1)}(t) +$$

$$(**) \quad + p_{n-2}\, x^{(n-2)}(t) + \cdots$$

$$p_1\, x'(t) + p_0\, x(t) = 0$$

on homogeeninen koska sen oikea puoli $= 0$.

Filosofinen kysymys: Mikä voi olla sellainen luokka funktioita joiden derivaatat niin paljon muistuttavat toisiaan, että ne voidaan summata identtisesti nollaksi?

Eksponenttifunktio

Yritte & Ansatz:

Kokeillaan ratkaisua

$$x(t) = C e^{\lambda t}$$

joillain vakioilla C, λ jotka haluamme määrätä.

$$x'(t) = \lambda C \cdot e^{\lambda t}$$

$$x''(t) = \lambda^2 C \cdot e^{\lambda t}$$

$$\vdots$$

$$x^{(n)}(t) = \lambda^n C \cdot e^{\lambda t}$$

Sijoittamalla nämä DY:öön (#5) saadaan

$$C\left(\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0\right)e^{\lambda t}$$

$$= C\, p(\lambda)\, e^{\lambda t} = 0$$

jossa

$$p(\lambda) := \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0$$

on DY (**):n **karakteris-tinen polynomi**.

Jos λ olisi karakt. pol. nollakohta niin yrite

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

toteuttaisi DY:n.

Polynomilla $p(\lambda)$ astetta n on tasan n kpl kompleksiarvoisia juuria

Esim: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0$

tällä on 2 juurta kompleksitasossa, $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 1$.

(laskettu kertalukuna mukaan!)

Fysikaalisista syistä kertoimet p_{n-1} .... p_1, p_0 ovat tyypillisesti reaalisia; tästä seuraa että ei-reaaliset juuret esiintyvät kompleksikonjugaattipareina. Todellakin,

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} p_j \lambda^j = 0$$

ja $p_j \in \mathbb{R} \ \forall j$, niin

$$0 = \overline{P(\lambda)} = \sum_{j=1}^{n} \overline{p_j} \cdot (\overline{\lambda})^j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j (\overline{\lambda})^j$$

$$= P(\overline{\lambda}).$$

Ts. λ on nollakohta $\Leftrightarrow$ $\overline{\lambda}$ on nollakohta.

<u>Erisuurten juurten tapaus</u>

Tällöin saadaan n kpl eri funktioita

$$\phi_j(t) := e^{\lambda_j t} \quad j=1,\dots,n$$

jossa $\lambda_1, \dots \lambda_n$ ovat karakteristisen yhtälön $p(\lambda)=0$ ratkaisuja.

Koska derivaatti (myös n. kertaisena) on lineaarinen kuvaus, myös kaikki lin. kombinaatiot

$$(3) \quad \Phi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(t)$$

on ~~myös~~ saman yhtälön (**) ratkaisuja.

(Helppo lasku, laske itse.)

Onko funktioita ϕ_j "liikaa" siinä mielessä siinä mielessä että vähempikin olisi riittänyt samojen lin. kombinaatioiden Φ kattamiseksi?

<u>Määr:</u> Sanotaan että funktiot $\phi_1, \ldots \phi_n$ ovat <u>lin.</u> <u>vapaita</u> jos yhtälö

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(t) \equiv 0 \quad \text{nolla funktio}$$

toteutuu ainoastaan jos $c_1 = c_2, \ldots = c_n = 0$.

Päinvast. tapauksessa sanotaan että joukko $\{\phi_1 \ldots \phi_n\}$ on <u>lin.</u> <u>riippuva</u>.

Lause: Jos juuret $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ovat kaikki keskenään erisuuria, niin tällöin funktiot

$$\phi_j(t) := e^{\lambda_j t}, \ j = 1, \dots n,$$

ovat lin. riippumattomia.

Perustelu: Tapaus $n = 2$ riittää meille. $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \overset{\forall t}{=} 0$$

Jos eivät olisi lin. riippumattomia, niin voitaisiin olettaa että $C_1 \neq 0$. Tällöin

$$\underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{\neq 0} = -\frac{C_2}{C_1} e^{\lambda_2 t} \ \forall t$$

eli

$$\underbrace{e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t}}_{\text{funktio } \neq 0.} = \underbrace{-\frac{C_2}{C_1}}_{\text{vakio}} \ \forall t$$

jonka derivaatta on

$(\lambda_1 - \lambda_2) e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t}$ - - - - . 10

Ristiriita todistaa, että ovat lin. vapaita. ☐

<u>Moninkertaisten</u>

<u>juurten</u> <u>tapaus</u>

Tässä tapauksessa joudumme tekemään ylimääräistä työtä saadaksemme n kpl. lin. <u>vapaita</u> ratkaisuja

(Tarvitaan tosiaan n kpl kuten jatkossa ilmenee)

Tarkastellaan 2. kertaluvun yhtälöä

$$x'' + px' + qx = 0$$

jonka karakteristinen pol.

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

eli

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=0$$

eräillä $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Tapaus $\lambda_1 = \lambda_2$ kiinnosta-

mutta tutkimme tapausta

jossa $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta$, $\Delta \to 0$.

Jos $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (eli $\Delta \neq 0$)

niin ratkaisut

$$\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$

$$\phi_2(t) = e^{(\lambda_1+\Delta)t}$$

ovat lin. vapaita.

Myös lin. kombinaatio

$$\frac{\phi_2(t) - \phi_1(t)}{\Delta}$$

on saman yhtälön ratkais.

Siis $\forall \Delta > 0$ funktio

$$\phi_\Delta(t) = \frac{e^{(\lambda_1+\Delta)t} - e^{\lambda_1 t}}{\Delta}$$

on ratkaisu. "Virittämällä" komponentteja arvoja viedään Δ nollaksi; tällöin

$$\phi(t) = \lim_{\Delta \to 0} \phi_\Delta(t) = \frac{d}{d\lambda_1} e^{\lambda_1 t}$$

$$= t e^{\lambda_1 t}$$

ketjusääntöä, derivointi λ_1:n suhteen.

Onko niin että funktiot

$$\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$

ja

$$\phi(t) = t e^{\lambda_1 t}$$

ovat lin. riippumattomia ja lisäksi DY:n ratkaisuja. 130

Ratkaisuja ovat.
Lin. riippumattomuus

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} = 0 \quad \forall t$$

(Oletetaan $c_1 \neq 0$)

$$\underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{\neq 0} \underbrace{(c_1 + c_2 t)}_{= 0 \ \forall t} = 0 \quad \forall t$$

mahdollista vain jos
$c_1 = c_2 = 0$. Ristiriita.
Ovat lin. riippumattomia.

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu

Lause: Oletetaan, että differentiaaliyhtälön

(4) $$x^{(n)}(t) + p_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + p_1 x'(t) + p_0 x(t) = 0$$

karakteristiselle polynomille

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0$$

on m kappaletta ($m \le n$) erisuuria juuria, joita merkitään

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m.$$

Merkittäköön juuren λ_j kertalukua luvulla $n_j \in \mathbb{N}$; $1 \le n_j \le n$, $j = 1, \ldots, m$.

Jokaista juurta λ_j kohden muodostetaan funktiot

$$n_j \text{ kpl} \left\{ \begin{aligned} \phi_{j,1}(t) &= e^{\lambda_j t} \\ \phi_{j,2}(t) &= t e^{\lambda_j t} \\ \phi_{j,3}(t) &= t^2 e^{\lambda_j t} \\ &\vdots \\ \phi_{j,n_j}(t) &= t^{n_j} e^{\lambda_j t} \end{aligned} \right.$$

Tällöin

(i) funktioita $\phi_{j,k}$ on tasan n kpl, jossa indeksit menevät $1 \leq k \leq n_j$, $1 \leq j \leq m$.

(ii) Joukko

$$\{\phi_{j,k}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k < n_j}}$$

on lineaarisesti vapaa.

(iii) Jokainen $\phi_{j,k}$ on ratkaisu differentiaaliyhtälölle (4).

Perustelu ohitetaan (mutta löytyy vaikkapa Kreyszigin kirjasta.) $\blacksquare$

Määr: Olkoon $\phi_{j,k}$ kuten edellisessä lauseessa. Tällöin n:stä (mahdollisesti kompleksilukuarvoisesta) parametrista $c_{j,k}$

$(1 \le j \le m, \quad 1 \le k \le n_j)$

riippuva lauseke

$$x(\underbrace{c_{1,1}, c_{1,2} \dots c_{m,n_m}}_{n \text{ kpl}}; t)$$

$$:= \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le k \le n_j}} c_{j,k} \cdot \phi_{j,k}(t)$$

on yhtälön (4) yleinen ratkaisu.

Jos parametreille kiinnitetään jotkin numeeriset arvot, saadaan näitä vastaava yksityis- l. partikulaariratkaisu.

Lause: yhtälön (4)

jokainen ratkaisu voidaan esittää yleisen ratkaisun avulla, valitsemalla sopivat arvot parametreille $c_{j,k}$.