24.10.2006

Eksponenttifunktion derivaatta

$$D = \frac{d}{dx}$$

$$f(x) = e^x$$

$$D(e^x) = e^x$$

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y.$$

$$z(x) = \ln y(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\ln y)$$

$$(y = y(x))$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Ketjusäännöllä!

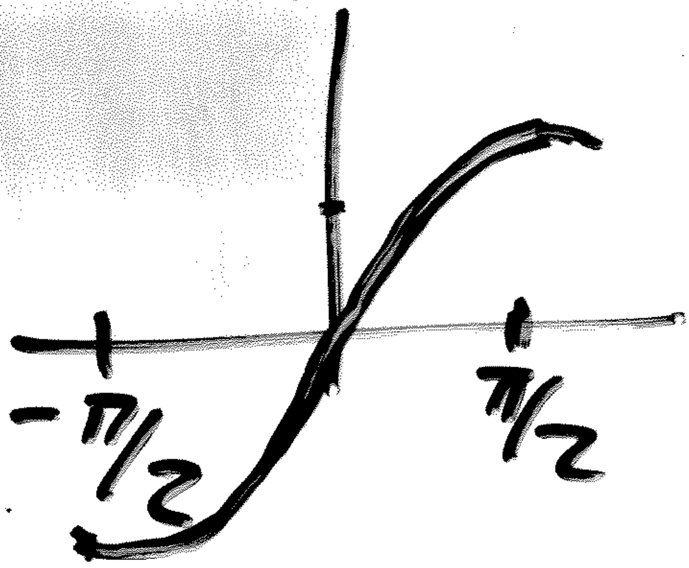
koska $y = e^x \neq 0$, saadaan

$$y = \frac{dy}{dx} \quad \text{eli}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

Arcus-funktioiden derivaatat

$y = \sin x, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



2

Tämä nouseva funktio koska $\frac{dy}{dx} = \cos x > 0$ kun $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

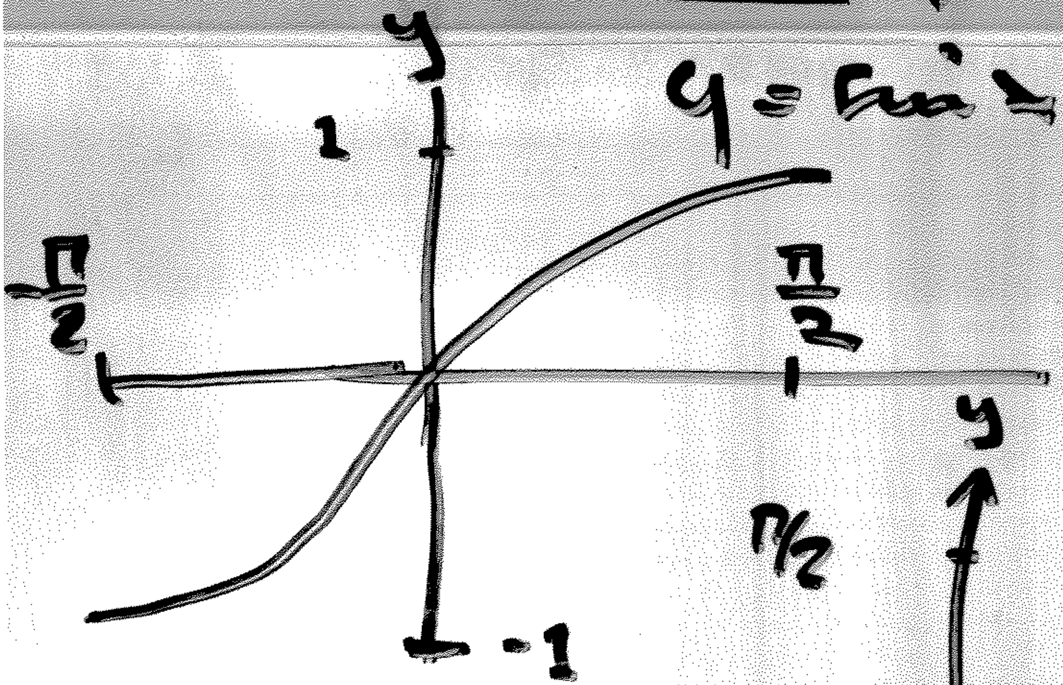
On olemassa käänteis-funktio f^{-1} funktiolle

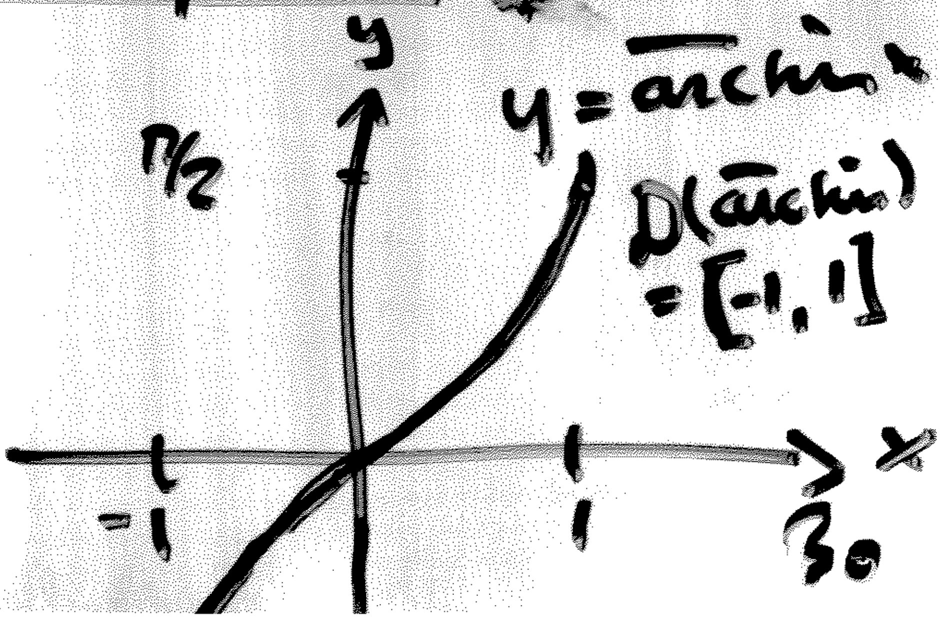
$$f(x) = \sin x, \quad D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Tätä funktiota kutsutaan arkussiniksi:

$$f^{-1} = \overline{\arcsin}$$

(viiva on merkkinä siitä että kyseessä on <u>pääarvo</u>)





$D \arcsin x = ?$

$y = \arcsin x \qquad x \in (-1, 1)$

$\Leftrightarrow \quad x = \sin y \qquad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$(y = y(x))$

Implisiittisesti derivoidaan x:n suhteen molemmin puolin:

$$1 = \frac{dx}{dx} = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Halutaan eliminoida y käyttäen hyväksi tietoa $x = \sin y$.

$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

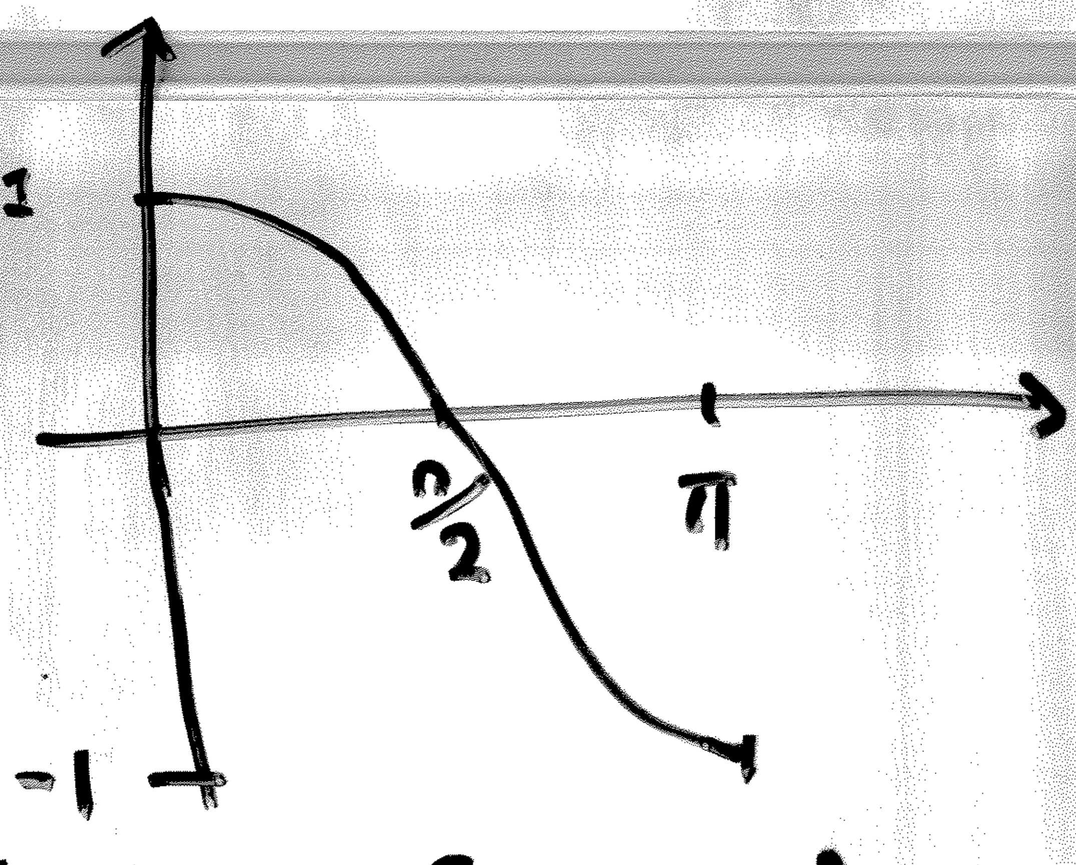
Saadaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

siis $\frac{d \operatorname{arcsin} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>Entä arccos?</u>

$y = \cos x \qquad x \in [0, \pi]$



laskeva funktio!

Oikotie:

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Jos $x = \overline{\arccos}\, y$ joka määrit. kosinin käänteisfunktion ($x \in [0, \pi]$, $y \in [-1, 1]$) niin

$$\overline{\arccos}\, y = \frac{\pi}{2} - \overline{\arcsin}\, y.$$

Nyt saadaan

$$\frac{d}{dy}\overline{\arccos}\, y = -\frac{d}{dy}\overline{\arcsin}\, y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \quad \blacksquare$$

Differentiaali yhtälöt

Notaatiota:

- $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}_+$ merkitsevät reaaliakselia ja posit. reaaliakselia $[0, \infty)$.
- kompleksitaso $\mathbb{C}$
- f:n n:n kertaluvun derivaatat

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n}(t)$$

tai jopa $\left(D := \frac{d}{dt} \right)$

niin $D^n f$. $f^{(1)} = f'$
$f^{(2)} = f''$ ...

• Jos f:llä on derivaatta $f'(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ ja lisäksi funktio

$$\mathbb{R} \ni t \xrightarrow{f'} f'(t) \in \mathbb{R}$$

on <u>jatkuva</u>, sanotaan että f on <u>jatkuvasti derivoituva</u> ja kirjoitetaan

$$f \in C^1(\mathbb{R}).$$

Puhutaan C^1-funktioista. Jos f on n kertaa derivoituva ja $f^{(n)}$ on jatkuva niin tällöin kirjoitetaan

$$f \in C^n(\mathbb{R}).$$

• Samoin hajoamisten lukumäärä on suoraan verrannollinen näytteen kokoon (hajoamattomien ytimien lukumäärään) hetkellä t.

Kun $\Delta t \approx 0$ pieni, saadaan näille likimääräistykselle

$$(*) \quad n(t+\Delta t) - n(t) \approx \lambda\, n(t)\, \Delta t$$

jossa λ on eräs kerroin joka riippuu alkuaineesta.. Kaavasta (*) saadaan

$$(**) \quad \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t} \underset{\Delta t \text{ pieni}}{\approx} \lambda\, n(t)$$

Hajoamislaki

Merkitään funktiolla $n = n(t)$ näytteessä hetkellä $t \geq 0$ olevien hajoamattomien uraaniytimien lukumäärää. Tällöin $n(t)$ on kokonaisluku $\longrightarrow$ paha juttu, jos haluttaisiin derivoida.

Lähtökohdat:

- ytimet hajoavat toisistaan riippumatta.
- hajoamisten lukumäärä näytteessä aikavälillä $[t, t+\Delta t]$ on suoraan verrannollinen välin pituuteen $\Delta t > 0$.

Tehdään yksinkertaistava oletus:

$$n \in C^1(\mathbb{R})\ !$$

Tällöin

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t} = n'(t)$$

ja tällöin (**) antaa meille yhtälön

$$n'(t) = \lambda\, n(t)$$

Tätä kutsutaan hajoamislain <u>differentiaaliyhtälöksi</u>; se sitoo funktion $n(t)$ ja eräät sen derivaatoista toisiinsa.

Ottamalla huomioon häyllteen alkuaktiivisuus hetkellä $t=0$, saadaan alkuarvotehtävä

$$(3)\quad \begin{cases} n'(t) = \lambda n(t) & t \geq 0 \\ n(0) = n_0 . \end{cases}$$

Jos pystymme osoittamaan että alkuarvotehtävällä (3) on kullakin alkuarvolla n_0 yksikäsitteinen ratkaisu $n(t)$, niin malli voidaan katsoa toimivaksi (tehtyjen approksimaatioiden puitteissa).

Alkuarvotehtävän (3) ratkaisu on

$$n(t) = C e^{\lambda t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\left(n'(t) = C \lambda e^{\lambda t} \right)$$

jossa vakio C tulee valita siten että alkuehto $n(0) = n_0$ toteutuu:

$$C = n(0).$$

Puoliintumisaika $T_{1/2}$ on se aika, jolloin näytteen (alku) aktiivisuus on puolittunut:

$$n(T_{1/2}) = n_0/2$$

$$\Leftrightarrow \quad n_0 e^{\lambda T_{1/2}} = n_0/2$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda T_{1/2} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \quad T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Tätä yhtälöä soveltamalla saadaan mittausten puoliintumisajasta arvo parametrille λ.

Peruskäsitteitä

Differentiaaliyhtälö

on algebrallinen yhteys funktion f ja eräiden sen derivaattojen $f^{(j)}$, $j = 1, \ldots$ välillä:

(4) $F(t, f(t), f'(t), \ldots f^{(n)}(t)) = 0$

jossa F on $n+1$ muuttujan "säännöllinen" funktio.

Funktiota f kutsutaan (4) ratkaisuksi.

Differentiaaliyhtälöllä voi olla yksi tai useampi ratkaisu, voi olla olemattakin.

Jos DY sisältää ainoastaan lineaarikombinaatioita funktiosta $x(t)$ ja sen derivaatoista, sanotaan että DY on lineaarinen:

$$x^{(n)}(t) + P_{n-1}(t)\, x^{(n-1)}(t) + P_{n-2}(t)\, x^{(n-2)}(t) + \dots \tag{5}$$
$$\dots\ P_1(t)\, x'(t) + P_0(t)\, x(t) = r(t).$$

Yhtälö

$$x''(t) + \alpha\,[x'(t)]^2 + x(t) = 0$$

on <u>epälineaarinen</u>.

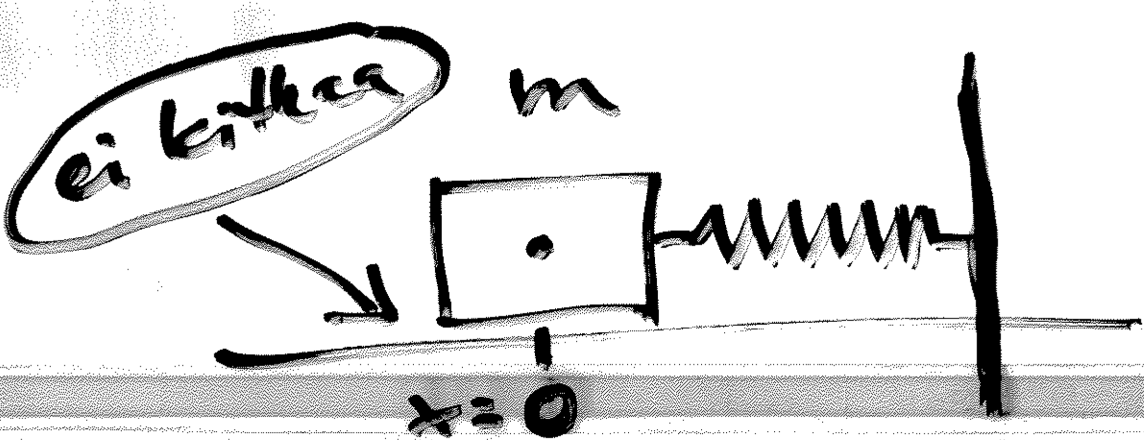
Jos lin. DY:llä (5) funktiot $P_0(t), \dots P_{n-1}(t)$ ovat <u>vakioita</u>, niin yhtälöä kutsutaan <u>vakiokertoimiseksi</u>.

Keskitymme jatkossa <u>vakiokertoimisten</u> <u>lineaaristen</u> DY:n ratkaisemiseen.

Differentiaaliyhtälön kertaluku on yhtälössä esiintyvän korkeimman derivaatan kertaluku.

Massajousisysteemi

Punnus ja jousi:



Jousen $\left\{\begin{array}{l}\text{puristumaton}\\ \text{venymätön}\end{array}\right.$ asema vastaa punnuksen paikkaa $x = 0$.

Tehtävä: etsi differentiaaliyhtälö ~~ja~~ punnuksen paikalle hetkellä t.

$$x = x(t), \quad t \geq 0.$$

Newtonin mekaniikka

Kappaleeseen (massa m) vaikuttavien kaikkien voimien resultantti

$$F(t) = \sum_i F_i(t)$$

saattaa punnuksen liikkeeseen, jonka kiihtyvyys on $\frac{F(t)}{m} = a(t)$.

Toisaalta, $a(t) = x''(t)$ derivaatan määrit. perusteella:

$$F(t) = m\, x''(t).$$

Jousimalli:

$$F_{jousi}(t) = - k\, x(t)$$

(venyttävä tai puristava voima suoraan verrann. venymään, vastakk. suunt.)

Koska jousivoima on ainoa voima, saadaan

$$m x''(t) = -k x(t)$$

joka on lin. 2. kertaluvun differentiaaliyhtälö.

Alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} m x''(t) + k x(t) = 0, \\ x(0) = x_0, \; x'(0) = v_0. \end{cases}$$

Tällä tehtävällä on yksikäsitt. ratkaisu. (Osoitetaan myöh.)

Kitkatermi

Entä jos lisäksi vaikuttaisi kitkavoima

$$F_{kitka}(t) = -\mu x'(t)?$$

Tällöin

$$F(t) = F_{jousi}(t) + F_{kitka}(t)$$

Sellainen malli muuntuis

$$m x''(t) = F(t)$$
$$= -k\, x(t) - \mu\, x'(t).$$

eli

$$m x''(t) + \mu x'(t) + k x(t) = 0$$

—