Monotoniset funktiot

Määr: Olkoon f funktio määritelty välillä $I = [a, b]$, $x_1, x_2 \in I$ pisteitä.

(i) Jos kaikilla $x_1, x_2 \in I$ pätee
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
niin tällöin f on nouseva.

(ii) Jos $\forall x_1, x_2 \in I$ pätee
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
niin tällöin f on ei-laskeva.

(iii) Jos $\forall x_1, x_2 \in I$ pätee
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
niin f on laskeva

(iv) Jos $\forall x_1, x_2 \in I$ pätee
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$
niin f on ei-nouseva.

<u>Lause</u>: Olkoon $I=(a,b)$ avoin väli ja $\tilde{I}$ jokin sellainen väli joka sisältää I:n ja mahd. päätepisteitä a, b.

Oletetaan:

(1) f on jatkuva $\tilde{I}$:ssä

(2) f on derivoituva I:ssä.

Tällöin:

(a) Jos $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ niin f on <u>kasvava</u> $\tilde{I}$:ssä

(b) Jos $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ niin f on <u>ei-laskeva</u> $\tilde{I}$:ssä.

(c) Jos $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$ niin f on <u>laskeva</u> $\tilde{I}$:ssä

(d) Jos $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ niin f on <u>ei-nouseva</u> $\tilde{I}$:ssä

20

Perustellaan (a):

Olkoon $x_1, x_2 \in \tilde{I}$ siten

että $x_1 < x_2$.

Väliarvolause sanoo:

$$\exists\, c \in (x_1, x_2) \subset I = (a,b)$$

siten että

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} = \underbrace{f'(c)}_{>0}$$

joten $f(x_2) - f(x_1) > 0$. ∎

Käänteisfunktiot

Määr: funktio f on **injektiivinen** (one-to-one) jos $\forall\, x_1, x_2 \in D(f)$ pätee:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Loogisesti sama asia kuin:

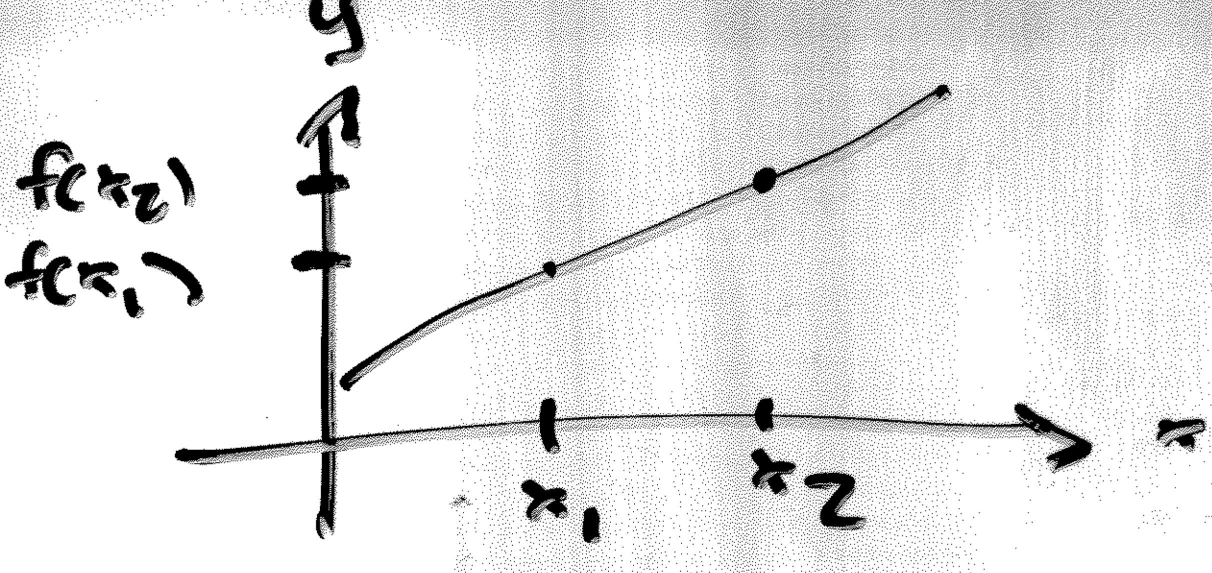
$\forall x_1, x_2 \in I$ pätee

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

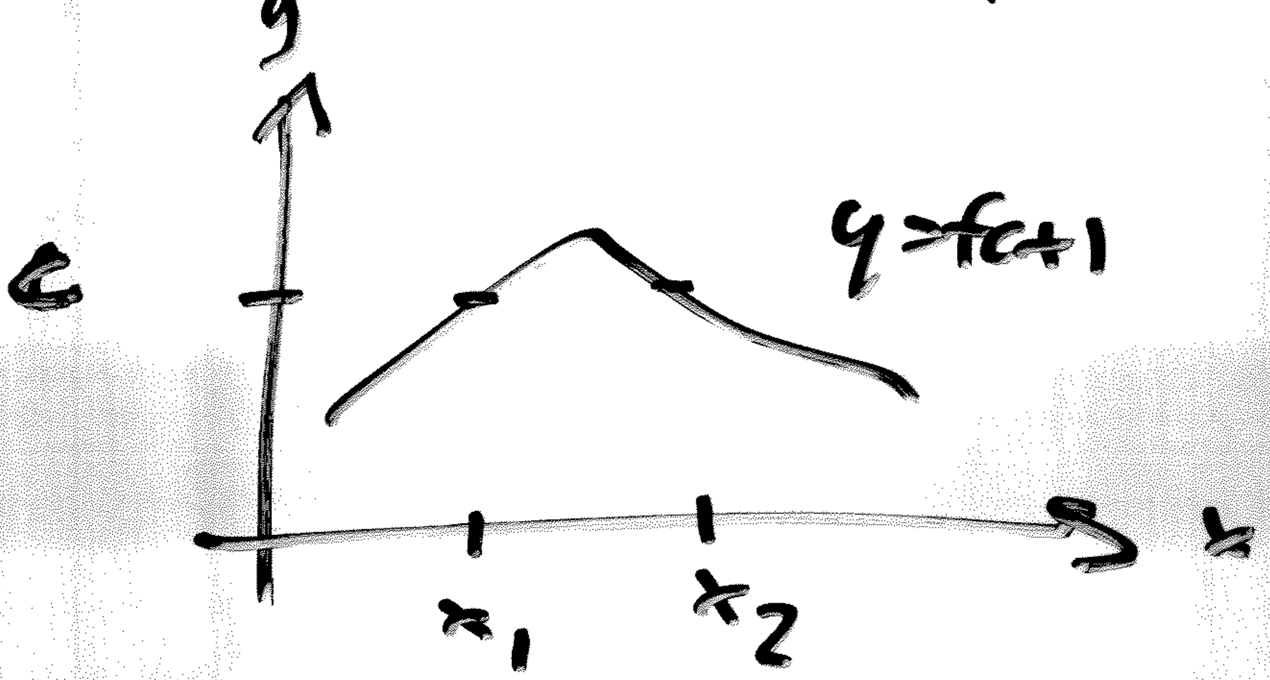
$$(A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A)$$

<u>Huom:</u>

Jos funktio f on määritelty välillä $I = [a,b]$ niin f on <u>kääntyvä</u> eli injektio jos ja vain jos f on joko kasvava tai laskeva!



Jos taas olisi "kukkula" f:n graafissa (eli ei olisi monotoninen:



$$f(x_1) = c = f(x_2) \quad .$$

<u>Määr</u>: Olkoon funktio f injektiivinen. Määrit.

$$D(f^{-1}) := f(D(f)) = R(f).$$

(f:n arvojoukko!)

Määrit $\forall x \in D(f^{-1})$ funktio f^{-1} siten että

$$f^{-1}(x) := y$$

jossa $x = f(y)$.

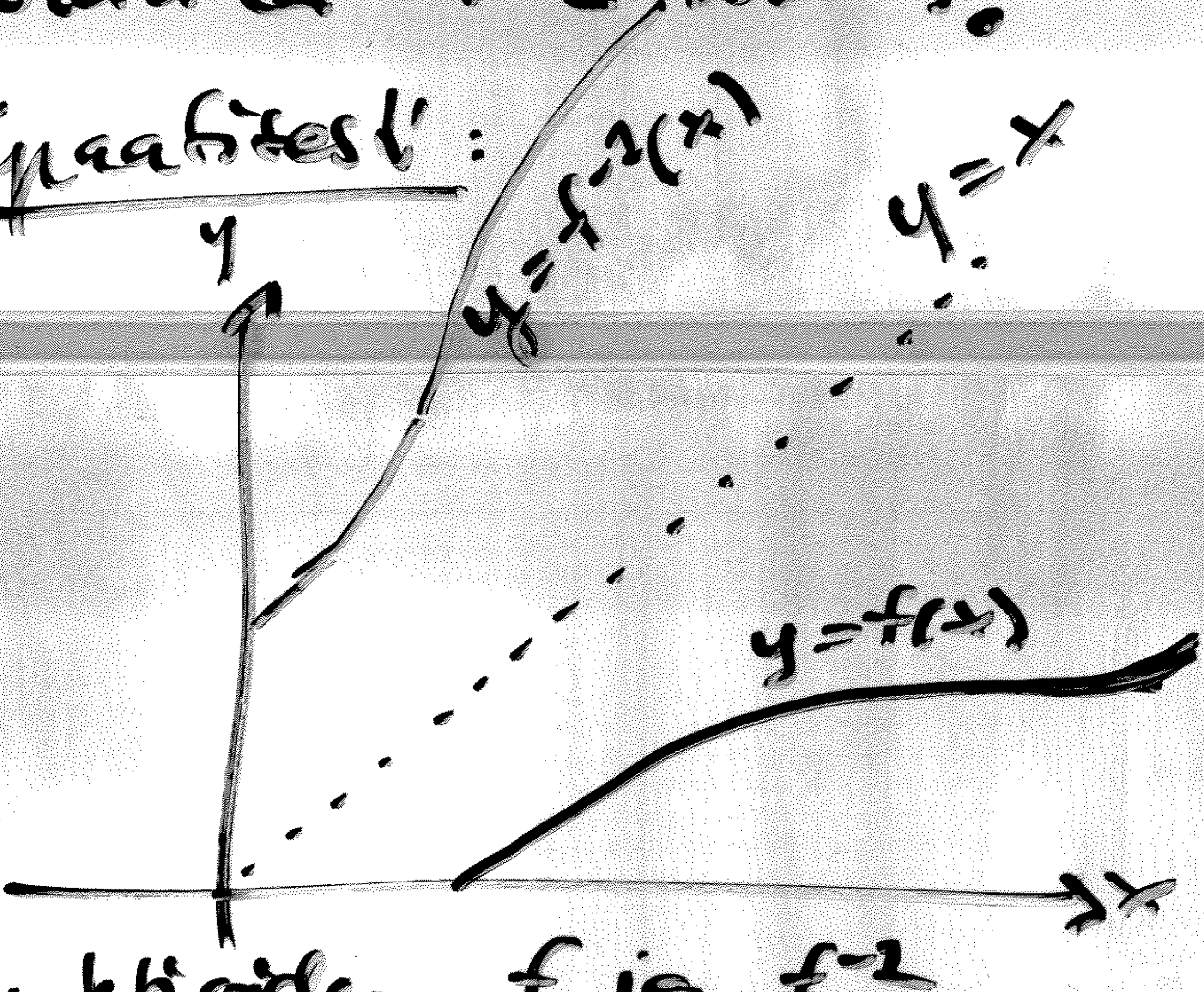
Tätä f^{-1}:stä kutsutaan f:n käänteisfunktioksi

<u>Huom</u>: Jos f <u>ei</u> ole injekt. niin tällöin yhtälöllä

$$x = f(y)$$

on <u>useita</u> ratkaisuja y eräällä $x \in D(f^{-1})$.

<u>Graafisesti</u>:



Funktioiden f ja f^{-1} kuvaajat ovat peilikuvia symmetria-akselin $y=x$ suht.

Eräitä käänteisfunktion ominaisuuksia

(i) $x = f^{-1}(y)$

$\Leftrightarrow \quad y = f(x)$

(ii) $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathrm{Range}(f)$

$\left(\mathrm{Range}(f) := f(\mathcal{D}(f)) \right)$

(iii) $\mathrm{Range}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$

(iv) $f^{-1}(f(x)) = x$

$\forall x \in \mathcal{D}(f)$

(v) $f(f^{-1}(y)) = y$

$\forall y \in \mathcal{D}(f^{-1})$

(vi) $f \circ f^{-1} = 1 \quad (\mathcal{D}(f^{-1}))$

$f^{-1} \circ f = 1 \quad (\mathcal{D}(f))$

jossa $1(x) := x$. (identiteettifunktio) 7.

Käänteisfunktion derivaatta

Olkoon $x = f(y)$ jossa f on injektiivinen.

Laske $\frac{dy}{dx}$ jossa $y = f^{-1}(x)$.

$$x = f(f^{-1}(x)) \quad \forall x \in D(f^{-1})$$

Ketjusääntöä käyttäen, molemmat puolet deriv. implisiittisesti x:n suhteen:

$$1 = \frac{dx}{dx} = f'(y)\frac{dy}{dx}$$

jossa $y = f^{-1}(x)$

8.

Ratkaisemalla

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

Ja hyvittämällä $y = f^{-1}(x)$

Saadaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Esim: $y = x^3 + x$.

on unpeklhiinen koko $\mathbb{R}$:ssä.

Ts. on olemassa käänt.

funktio $x = x(y)$.

Laske $\frac{dx}{dy}$.

$$1 = \frac{dy}{dy} = 3x^2 \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{dx}{dy}$$

$$= (3x^2 + 1) \frac{dx}{dy}$$

Josta

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 1}.$$

jossa $x = x(y)$ on

ratkaisu yhtälölle $y = x^3 + x$.

Luonnollinen logaritmi

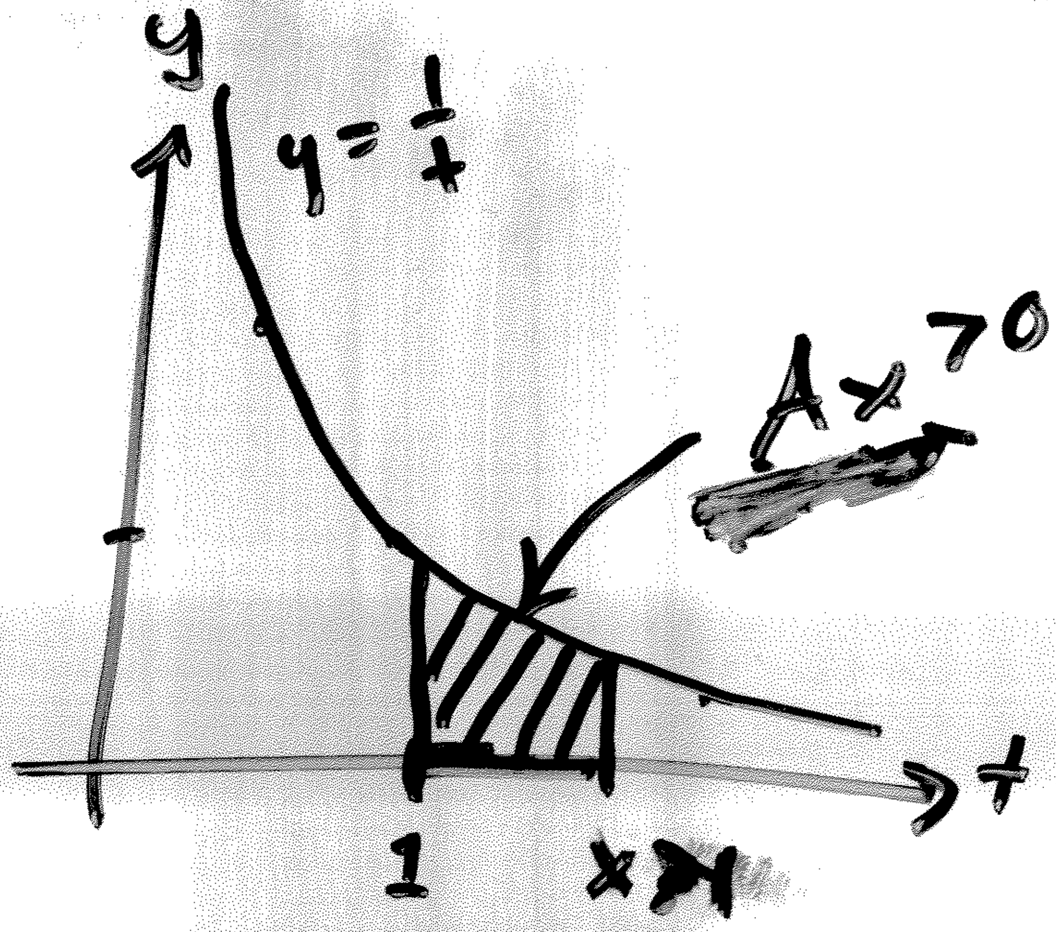
Määr: Kullakin $x > 0$, merkitään A_x:llä sen alueen pinta-alaa ($A_x \geq 0$) joka jää käyrän $y = \frac{1}{t}$, t-akselin, ja pystysuorien $t = 1$ ja $t = x$ väliin.

Tällöin

$$\ln x := \begin{cases} A_x & \text{jos } x \geq 1 \\ -A_x & \text{jos } 0 < x < 1 \end{cases}$$

(Perustuu siihen intuitioon että jokaiselle tällaiselle alueella on pinta-ala.)

Kuva:



Lause: Jos $x > 0$ niin

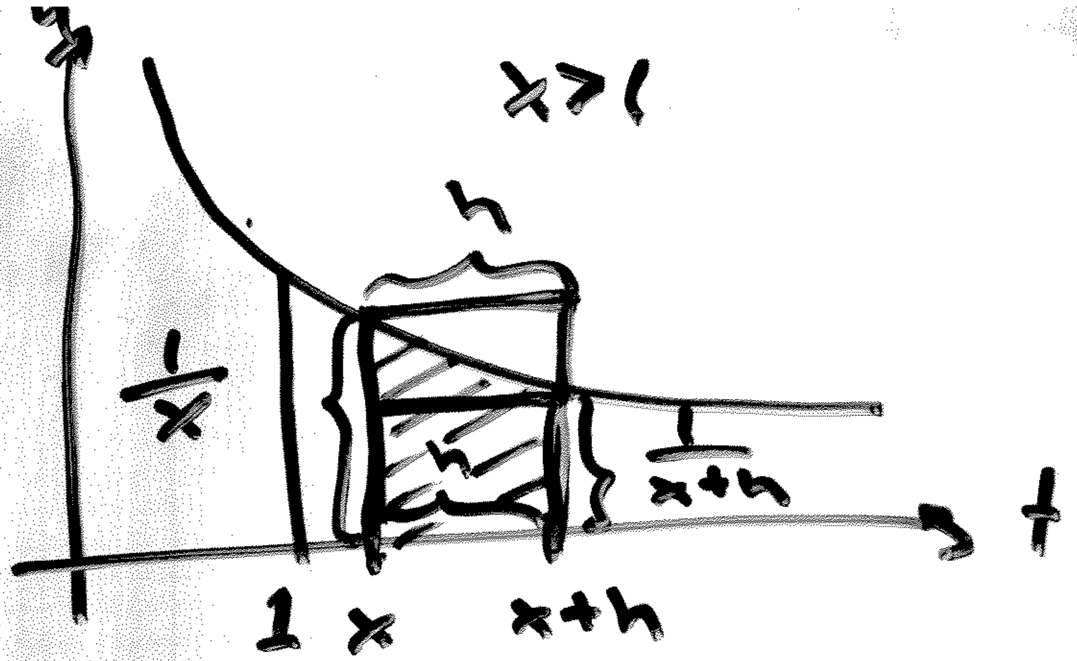
$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Erityisesti $\ln x$ on derivoituva koko $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

Perustelu:

Tarkastellaan kuvaa:

$h > 0$.



$$\ln(x+h) - \ln(x)$$

= viivoitetun alueen pinta-ala $A_{x,h}$.

Kahden suorakaiteen pinta-alojen avulla saadaan epäyhtälö

$$\frac{h}{x} < \ln(x+h) - \ln x < \frac{h}{x+h}$$

eli

$$\frac{1}{x} < \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} < \frac{1}{x+h}$$

Kurjstus periaatteelle

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{1}{x}. \blacksquare$$

<u>Lause:</u> $x, y > 0$

(i) $\ln xy = \ln x + \ln y$

(ii) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

(iii) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

(iv) $\ln x^r = r \ln x$

jossa $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$m, n \in \mathbb{N}$.

<u>Perustelu:</u> Olkoon $y > 0$.

$$\phi(x) = \ln(xy) - \ln x \quad \forall x > 0.$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{xy}\cdot y - \frac{1}{x} = 0.$$

Siis $\phi(x) = C \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$.

$$C = \phi(1) = \ln(y) - \underbrace{\ln 1}_{=0}$$

Ts.

$$\ln(xy) - \ln x = \ln y$$

joka todistti väitteen. $\blacksquare$

<u>Huom:</u>

(i) $\ln 1 = 0$

(ii) $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$

ja $\ln x$ on <u>kasvava</u> funktio (koska $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0$).

(iii) $\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$

Eksponenttifunktio

Havaitaan että $\ln x$ on injektiivinen kun $x>0$.

Tällöin on olemassa käänteisfunktio jota kutsutaan nimellä

$$x = \exp(y)$$

$$(y = \ln x).$$

Funktio $\exp(y)$ on määritelty $\forall y \in \mathbb{R}$ koska $\ln x$ saavuttaa kaikki arvot $y \in \mathbb{R}$ kun x liikkuu välillä $0 < x < \infty$.

Toisaalta:

$$\exp(y) > 0$$

koska $\ln x$ on määrit. kun $x>0$.

Eksponenttifunktion laskulakeja:

(i) $$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

(ii) $$\exp(x)^r = \exp(rx),\ r\in\mathbb{Q}$$

(iii) $$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

(iv) $$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

<u>Määr</u>: Luku e määrit. funktion $\exp(x)$ avulla

$$e := \exp(1).$$

Voidaan osoittaa (vaan ei vielä) että

$$e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Jos $r \in \mathbb{Q}$ niin ~~täkäin~~ (laskulaki (ii)) antaa

$$\exp(r) = \exp(r \cdot 1)$$

$$= \exp(1)^r = e^r$$

mutta <u>vain</u> jos r on rationaaliluku tähän-astisin tiedoin.

Kuitenkin $\exp(r)$ on määritelty <u>kaikille</u> reaaliluvuille $r \in \mathbb{R}$, ei vain $r \in \mathbb{Q}$.

Koska $\exp(r)$ on derivoituva, ja rationaalilukuja on todellakin <u>tiheässä</u> reaalilukujen joukossa, niin voidaan rekonstruoida $\exp(x)$ rationaali-

luvuilla saarnteltujen
arvojensa perusteella!
siis

$$e^x := \exp(x)$$

voidaan ottaa <u>määrit</u>
e:n mielivaltaiselle,
epärationaaliselle
potenssille.

Sama pätee mielivalt.
muun reaaliluvun
mielivaltaiselle reaali-
potenssille

$$\ln(a^x) := x \ln a$$

joten

$$a^x := e^{\overbrace{x\ln a}^{\text{reaaliluku}}}.$$

Määrit. a^x:lle.