Ketjusääntö

Lause: $f(u)$ on derivoituva pisteessä $u = g(x)$, ja g on derivoituva pisteessä x. Tällöin funktio

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

on derivoituva pisteessä x, ja pätee

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(\underbrace{g(x)}_{=u})\, g'(x).$$

Funktiota f kutsutaan tässä yhteydessä ulkofunktioksi ja g:tä sisäfunktioksi.

"Käsienheiluttelu-argumentti"

$$y = f(u)$$

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$$

$$= f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))$$

eli jossa käytetään

$$u = g(x) \quad \text{ja}$$

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$$

$$(\text{siis } u+\Delta u = g(x+\Delta x))$$

Tutkitaan erotusosamäärää

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} (D\, f\circ g)(x).$$

Saadaan, jos $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Ottamalla raja-arvo, kun $\Delta x \to 0$, niin myös $\Delta u \to 0$, ja saadaan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(u)\, g(x)$$

$$= f'(g(x))\, g(x). \quad \blacksquare$$

<u>Esim:</u> $y = \sqrt{x^2+1}$. Laske $\frac{dy}{dx}$.

$y = f(u)$, $f(u) = \sqrt{u}$

$u = g(x)$, $g(x) = x^2+1$

$$\frac{d\sqrt{u}}{du} = \frac{d\, u^{1/2}}{du}$$

$$= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

$$\frac{d(x^2+1)}{dx} = 2x.$$

Ketjusäännöllä:

$$\frac{d\sqrt{x^2+1}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Tätä ketjusääntöä voidaan käyttää m. kolmen sisäkkäisen funktion tapauksessa:

$$\frac{d}{dx} f(g(h(x)))$$

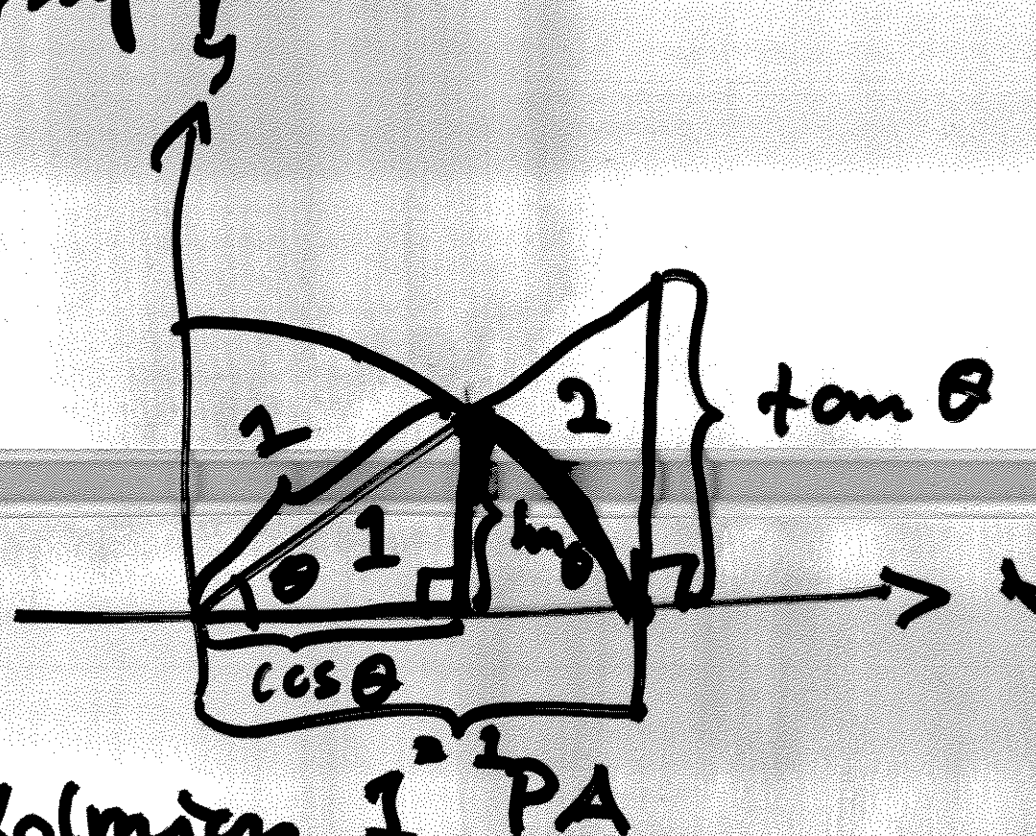
$$= \frac{d}{dx} f(g \circ h(x))$$

$$= f'(g \circ h(x)) \cdot \frac{d}{dx} g(h(x))$$

$= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x))\, h'(x)$.

Trigonometristen funktioiden derivaatat

Tarkastellaan yksikköympyrää



(Kolmion 1 PA
< ympyräsektorin PA
< kolmion 2 PA.)

Toisaalta kolmion 1 pystykateetin pituus
< θ-kulmaisen kaaren pituus

< kolmion 2 pystykateetin pituus

Eli jos $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin\theta < \theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

eli

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

koska $\sin\theta > 0$ kun $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Kuristusperiaate kun $\theta \to 0+$,

$$\underbrace{\lim_{\theta\to 0+} 1}_{=1} \leq \lim_{\theta\to 0+} \frac{\theta}{\sin\theta} \leq \underbrace{\lim_{\theta\to 0+} \frac{1}{\cos\theta}}$$

$$\frac{1}{\lim_{\theta\to 0+} \cos\theta} = \frac{1}{1} = 1$$

joten

$$1 \leq \lim_{\theta\to 0+} \frac{\theta}{\sin\theta} \leq 1.$$

70

Josta saadaan

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

Koska $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

niin

$$\lim_{\theta \to 0-} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin(-\theta)}{-\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{-\sin\theta}{-\theta} = 1.$$

Siis:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

<u>Lause:</u> $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$

<u>Perustelu:</u>

$$\frac{d \sin x}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

käytetään $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$

$$\sin(x+\Delta x) - \sin x$$

$$= \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x$$

$$= \sin x (\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x$$

Myös

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sin x \cdot \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \sin x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}$$

$$+ \cos x \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}_{=1}$$

Väite seuraa, jos nähdään eltä

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 0$$

Koska $\cos \Delta x = 1 - 2\sin^2 \frac{\Delta x}{2}$ (usko pois!), niin

$$\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = -\frac{2\sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= -\sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

$$= -\sin h \cdot \frac{\sin h}{h}$$

jossa $h = \frac{\Delta x}{2}$.

Ts.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\sin h \cdot \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= -\underbrace{\lim_{h \to 0} \sin h}_{\sin 0 = 0} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}}_{1}$$

$= 0.$ ∎

Seuraus

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

koska

$$\cos x = \sin\left(\overbrace{\frac{\pi}{2} - x}^{u = \frac{\pi}{2} - x}\right).$$

Ketjusäännölle

$$\frac{d\cos x}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\underbrace{(-1)}_{\frac{du}{dx}}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= -\sin x.$$

Seuraus:

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx}$$

$$= \frac{\overbrace{\cos x}^{(\sin x)'}\cdot\cos x - \sin x\,\overbrace{(-\sin x)}^{(\cos x)'}}{\cos^2 x} \qquad \boxed{\sin^2 + \cos^2 = 1}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Väliarvolause kaverikseen

Lause: Jos f on määrit. avoimella välillä (a,b) ja se saavuttaa maksiminsa (tai miniminsa) pisteessä $c \in (a,b)$, ja lisäksi $f'(c)$ on olemassa niin tällöin $f'(c) = 0$.

Perustelu:

Oletetaan että $c \in (a,b)$ on funktion f maksimi. Tällöin

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

kun $x \in (a,b)$.
Jos $c < x < b$, niin $x - c > 0$ ja saadaan

$$(*)\quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \quad \forall x \in (c,b)$$

Jos katsotaan c:stä vasemmalle $a < x < c$, niin $x - c < 0$ ja

$$(**)\quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \forall x \in (a,c)$$

Kaavasta (*) seuraa

$$\lim_{x \to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

ja kaavasta (**)

$$\lim_{x \to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0.$$

Koska f on derivoituva pisteessä c (OLETUS) niin

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \quad \exists$$

ja yhtä suuri kuin

1) vas. puol. raja-arvo
2) oik. puol. raja-arvo
3) derivaatta $f'(c)$.

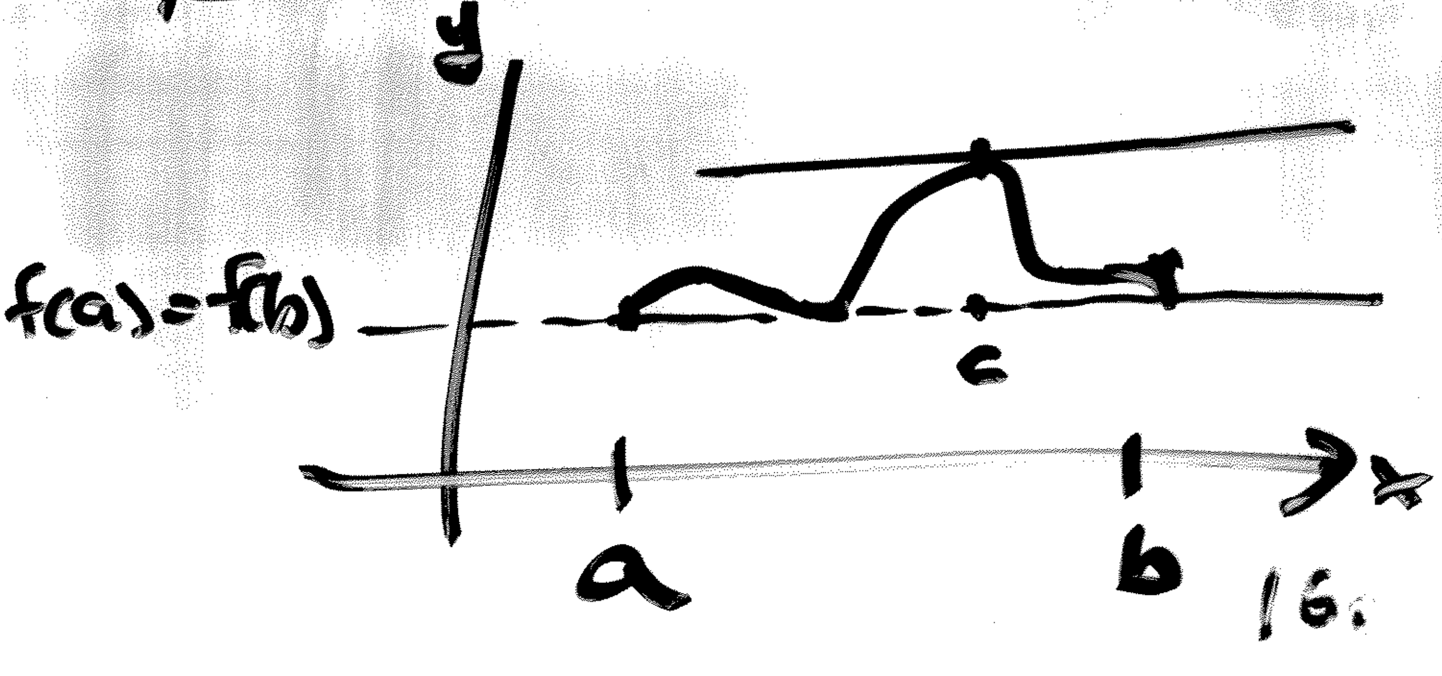
Tällöin $f'(c) \leq 0$ ja $f'(c) \geq 0 \Rightarrow f'(c)=0$ $\blacksquare$.

Lause (Rollen lause).

Olkoon f jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituva avoimella välillä (a,b). Oleta: $f(a)=f(b)$.
Tällöin on olemassa $c \in (a,b)$ siten että

$$f'(c) = 0.$$

Graafisesti



16.

Perustelu:

Triviaalitapaus $g(x) = g(a)$ $\forall x \in [a,b]$ voidaan tulkea pois, koska vakiofunktion derivaatta $= 0$ ja c voidaan ottaa mielivaltaisesti väliltä (a,b).

Siis:

- joko on olemassa $x_0 \in (a,b)$ jolla $g(x_0) > g(a)$.
- tai on olemassa $x_0 \in (a,b)$ jolla $g(x_0) < g(a)$.

Riittää fundeerata 1. tapaus.

Koska f on jatkuva välillä $[a,b]$, se saavuttaa maksimin eräässä pisteessä $c \in [a,b]$. (Lause jatkuvasta funktiosta "kompaktilla" välillä).

Nyt

$$g(c) \geq g(x_0) > g(a)$$

josta seuraa että $c \neq a$.

Toisaalta, koska $g(a) = g(b)$ niin myös $c \neq b$.

Siis $c \in (a,b)$!

Koska f on derivoituva koko avoimella välillä (a,b) $\Rightarrow$ $f'(c)$ $\exists$.

~~Edellinen~~ lause sanoi, että $f'(c) = 0$.

$\blacksquare$

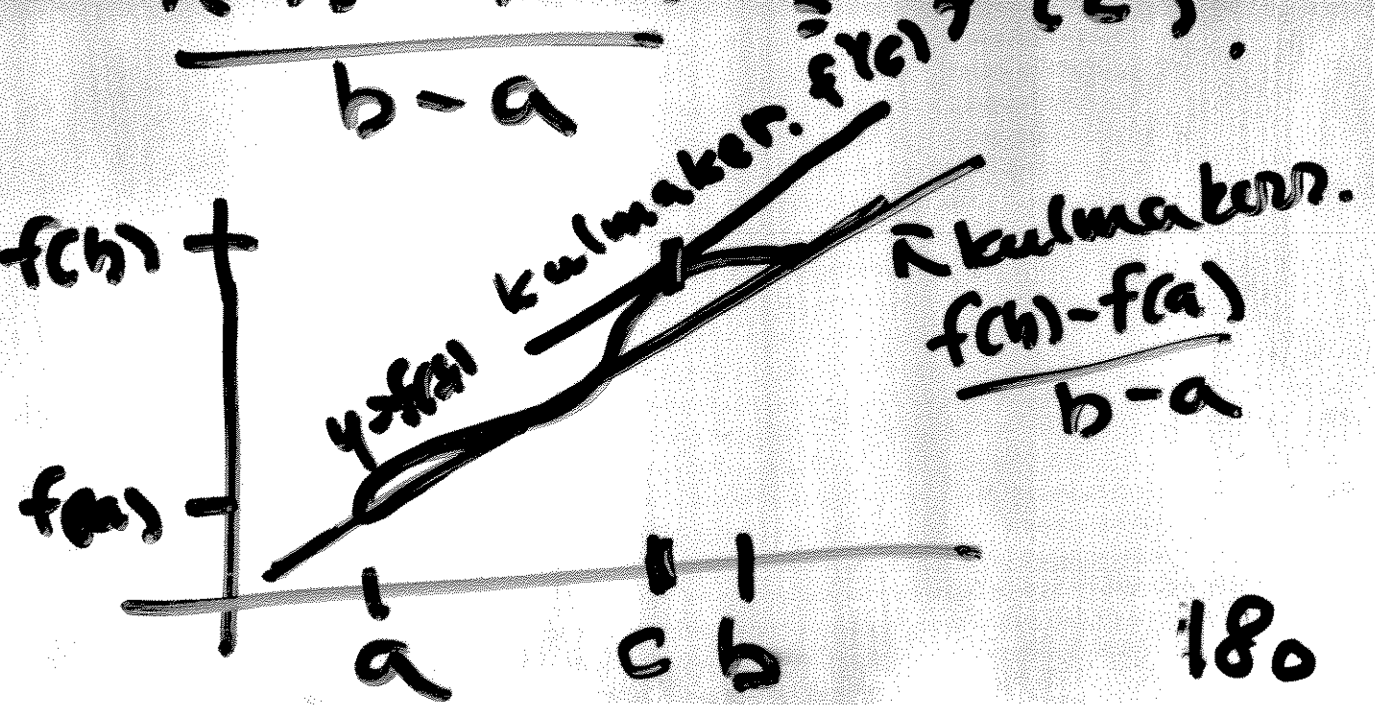
Lause: (Väliarvolause.)

(Eri asia kuin jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuus.)

Olkoon f jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituva avoimella välillä (a,b).

Tällöin on olemassa $c \in (a,b)$ siten että

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$



Huom: Rollen lause todisti jo tapauksen $f(a)=f(b)$.

Määrit.

$$g(x)=f(x)-\underbrace{\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)}_{\text{jänteen yhtälö!}}$$

Soveltamalla Rollea saadaan $c \in (a,b)$ siten että $g'(c)=0$.

Koska $g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ja $g'(c)=0$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \quad \blacksquare$$

Implisiittinen derivointi

Esim. laske $\frac{dy}{dx}$

jos $y = y(x)$ määräytyy yhtälöstä

(∗∗∗) $x^2 + y^2 = 25$.

(Eräs tapa ratkea olisi kirjoittaa

$$y = \sqrt{25 - x^2}\ )$$

Jos tiedetään, että $y = y(x)$ yhtälössä (∗∗∗) niin

$$x^2 + y(x)^2 = 25$$

Derivoidaan molemmin puolin, ketjusääntöä

2.00

käyttäen, x:n suhteen

$$2x + 2y(x)\,y'(x) = 0$$

josta saadaan

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

jossa $y(x) = \sqrt{25-x^2}$.

Voidaan kirj.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

koska osasimme ratk. $y = y(x)$ eksplisiittisesti.

Aina tämä ei onnistu.