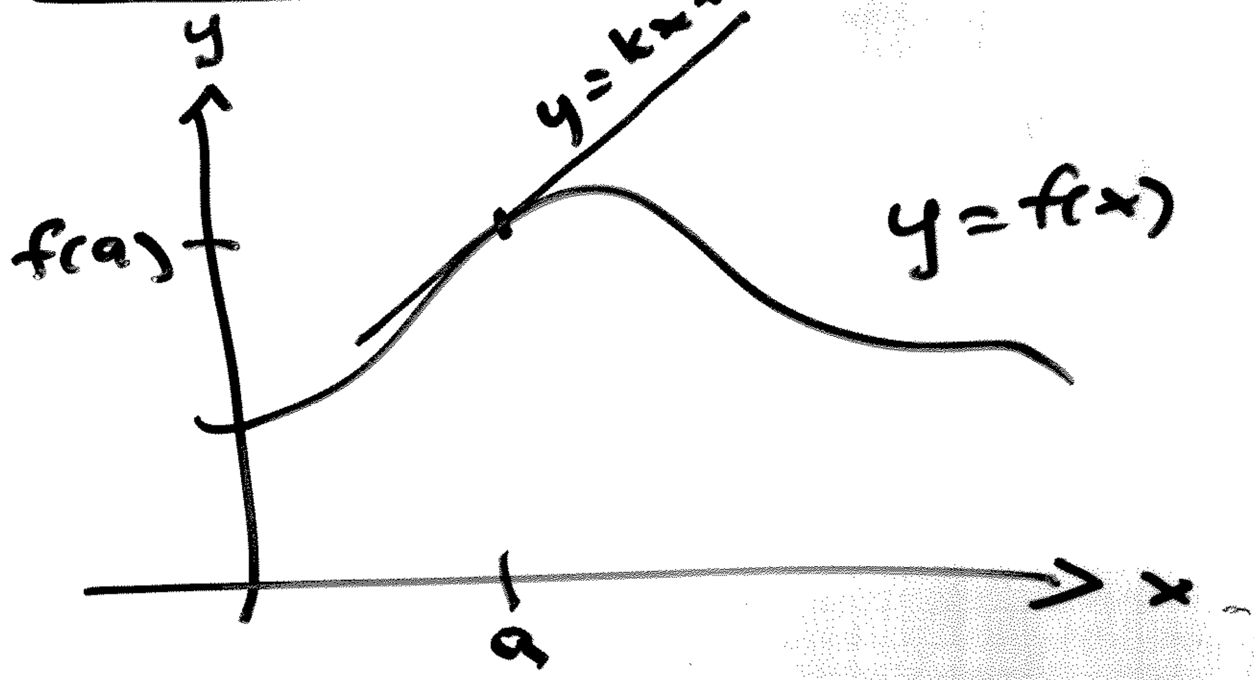
Derivaatta.



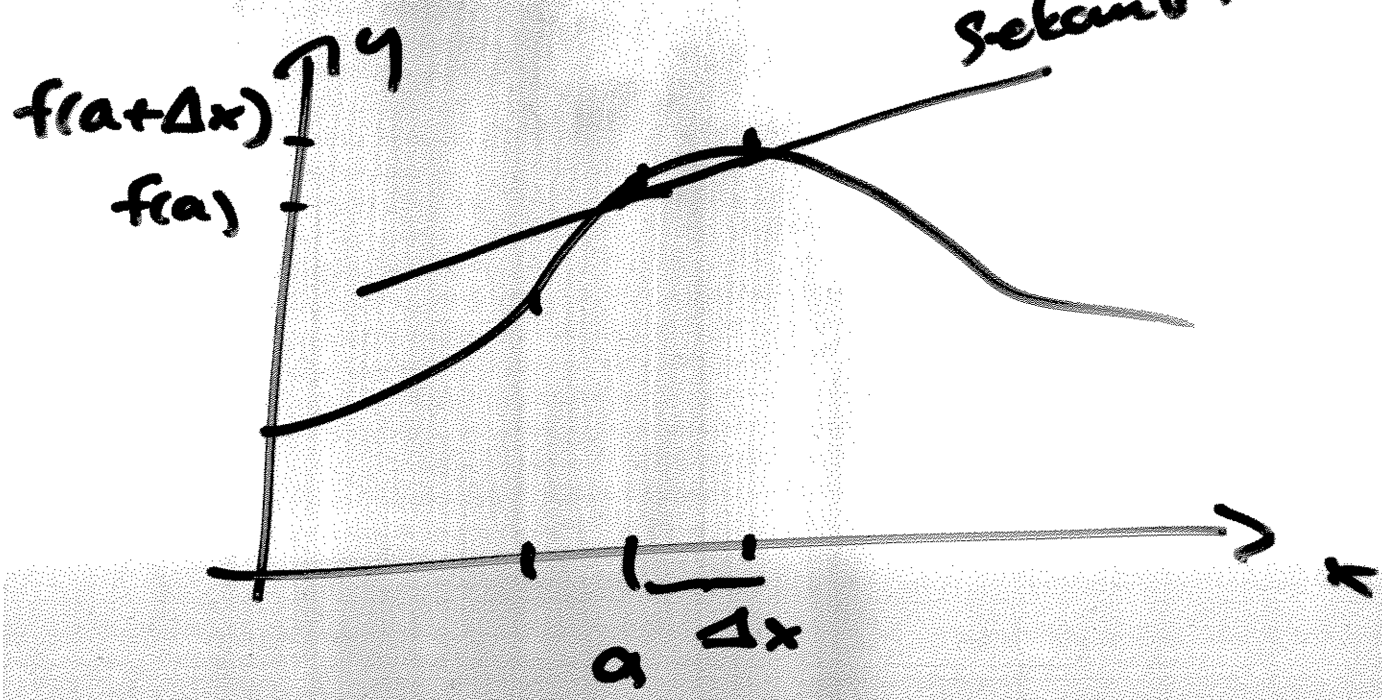
Tarkastellaan f:n käytöstä pisteen ympäristössä; pyrimme <u>korvaamaan</u> f:n eräällä suoralla

$$y = kx + m$$

joka mahd. hyvin "approksimoisi" f:ää pisteessä a ja lähellä.

Suora on tangentti, joten tehtäväksi jää määrätä vakiot k ja m datan f, a avulla.

Erotusosamäärä



Piirretään sekantti eli suora joka kulkee pisteiden

$$(a, f(a)) \quad (a+\Delta x, f(a+\Delta x))$$

kautta. Tämän suoran yhtälö on

$$y - f(a) = k_{\Delta x}(x - a)$$

jossa

$$k_{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(x)}{(a+\Delta x) - a}$$

Sekantista saadaan "parhaiten" tangentti, kunhan $\Delta x \to 0$ (geometrisista syistä).

Tangentin kulmakerroin

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

<u>Määr:</u> Olkoon f funktio ja $a \in D(f)$ määrittelyjoukon sisäpiste. Jos raja-arvo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

on olemassa, sanotaan että f on <u>derivoituva</u> $\}_0$

tai <u>differentioituva</u> pisteessä

a. Raja-arvoa kutsutaan f:n derivaataksi pisteessä a ja kirjoitetaan

$$f'(a) \equiv \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

$$\equiv \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

$$= \lim \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$(y = f(x).)$

<u>Määr:</u> Funktio f on <u>derivoituva</u> <u>jos</u> fe on derivoituva jokaisessa määrittelyjoukon pisteessä.

$\widehat{D(f)}$

Tämä määritelmä on ongelmallinen silloin kun

$D(f)$ ei ole avoin joukko (eli $D(f)$ sisältäisi muitakin kuin sisäpisteitä).

Ongelmia ei kuitenkaan synny, jos $D(f)$ on yhdiste äärellisestä määrästä avoimia, puoliavoimia ja suljettuja välejä.

Suljetun välin $I = [a, b]$ tapauksessa, päätepisteet a, b ovat hieman vaikeita, ja niissä derivaatta voidaan määritellä toispuoleisesti

$$f'(a) := \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x};$$

$$f'(b) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x}.$$

$\uparrow$
≤ 0

Esim: $y = x^2$. Laske derivaatta pisteessä $a \in \mathbb{R}$. $f(x) = x^2$ niin $f'(a) = ?$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a+\Delta x)^2 - a^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2 - a^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2a + \Delta x)$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} 2a}_{2a} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}_{=0}$$

Saatiin $f'(a) = 2a \ \forall a \in \mathbb{R}$.

<u>Esim:</u> $y = \frac{1}{x}$. Laske $f'(a)$ kun $a \neq 0$. $\left(f(x) = \frac{1}{x}\right)$.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{a+\Delta x} - \frac{1}{a}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{a-(a+\Delta x)}{(a+\Delta x)\Delta x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\cancel{\Delta x}}{(a+\Delta x)\Delta x} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(a+\Delta x)a}$$

$$= -\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}(a+\Delta x)a} = -\frac{1}{a^2}.$$

Ts. $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$. $\blacksquare$.

Differentiaalit

Idea on seuraava.

$$y = f(x)$$

ja f on derivoituva, niin merkitään

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

jossa $\Delta x \in \mathbb{R}$.

Kuinka sensitiivinen y on x:n pienille muutoksille?

Nyt $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

kaikille $x \in D(f)$

ja pätee

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

derivaatan määrit. nojalla.

Se että raja-arvo on olemassa tarkoittaa, että

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

kun Δx on "pieni".
Ts.

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

kun Δx on pieni
(koska f on derivoituva).

Toimintapisteessä x, kun sisäänmenevään signaaliin x tulee pieni muutos Δx, niin kuinka iso muutos on ulostulossa y?

Differentiaali on tämä yhteys silloin kun Δx ajatellaan "äärettömän pieneksi" mutta nollasta poikkeavaksi.

$$\Delta x \to dx$$

$$\Delta y \to dy$$

ja rajalla

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Tämä "muodollinen" kaava on <u>f:n differentiaali</u>.

Tämän takia Leibnitzin derivaatta notaatio on

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Derivointioperaattori laskusääntöjä:

Jos f on derivoituva määrittelyjoukko $D(f)$ niin kuvaus

$$f \longmapsto f' = \frac{df}{dx}$$

on derivointioperaattori. Merkitään tätä operaattoria joko D:llä tai $\frac{d}{dx}$:llä. Ts

$$Df = f'$$

tai

$$\left(\frac{d}{dx}\right) f = f'.$$

Toinen derivaatta eli "derivaatan derivaatta" tarkoittaa D:llä tai $\frac{d}{dx}$:llä operoimista kaksi kertaa

$$D^2 f = D(Df) = f''$$

tai

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f = \frac{d^2}{dx^2} f$$

$$= \frac{d^2 f}{dx^2} = f''.$$

Verrataan matriiseihin:

$$\underset{n \times n}{A} \triangleq D = \frac{d}{dx}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \triangleq f$$

<u>Lause:</u> Derivointioperaatio D on lineaarinen kuvaus:

(i) $D(f+g) = Df + Dg$

(ii) $D(\alpha f) = \alpha \cdot Df$; $\alpha \in \mathbb{R}$

Perustelu: i)

Täinä tarkoittaa että

$$(f+g)' = f' + g'.$$

$$(f+g)'(a) :=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f+g)(a+\Delta x) - (f+g)(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\begin{pmatrix} f(a+\Delta x) + g(a+\Delta x) \\ - f(a) - g(a) \end{pmatrix}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= f'(a) + g'(a). \quad \blacksquare$$

130

Yleisemmin:

$$(f+g+h)'$$

Pilkku

$$= ((f+g)+h)'$$

$$= (f+g)' + h'$$

$$= f' + g' + h'$$

J.n.e myös n:n summille.

<u>Tulon derivaatta</u>

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) \quad \forall x \in D(f) \cap D(g)$$

Tällöin:

$$D(fg) = (Df)g + f(Dg)$$

Perustelu:

$$(fg)'(a) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(fg)(a+\Delta x)-(fg)(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)g(a+\Delta x) - f(a)g(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\begin{pmatrix} f(a+\Delta x)\,g(a+\Delta x) \\ - f(a+\Delta x)\,g(a) \\ + f(a+\Delta x)\,g(a) - f(a)g(a) \end{pmatrix}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)g(a+\Delta x) - f(a+\Delta x)g(a)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)g(a) - f(a)g(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)\left[g(a+\Delta x) - g(a)\right]}{\Delta x}$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(a+\Delta x)-f(a)]\,g(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{f(a+\Delta x)}_{\to f(a)} \cdot \lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}}_{\to g'(a)}$$

$$+\underbrace{\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right]}_{\to f'(a)}\cdot g(a)$$

$$= f(a)\,g'(a) + f'(a)\,g(a),$$

joka pätee jos

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x) = f(a)$$

eli f olisi jatkuva pisteessä a.

Mutta näin on, jos f on derivoituva pisteessä a!

Lause: Jos f on derivoituva pisteessä $a \in D(f)$, niin se on myös jatkuva

Perustelu:

Koska f on derivoituva, niin raja-arvo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \quad \exists .$$

Nyt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(f(a+\Delta x)-f(a)\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \cdot \Delta x \right)$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}}_{= f'(a)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}_{= 0}$$

Katsomalla edellisen kaavan "päitä ja häntää" saadaan

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(a+\Delta x) - f(a) = 0.$$

∎

Esim.: Olkoon u, v funktioita ja $f = uv$. Laske $y'(2)$ jos tiedetään $u(2) = 2$, $u'(2) = -5$, $v(2) = 1$, $v'(2) = 3$.

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

kun $x = 2$ ja nämä arvot saadaan

$$f'(2) = (-5)\cdot 1 + 2\cdot 3$$
$$= 1$$

Ei tarvinnut tietää u:sta ja v:stä mitään muuta kuin annetut neljä ancraehin. u:n ja v:n "kaavoja" ei tarvitse.

Funktion $\frac{1}{f}$ derivointi

Oletetaan että f jo osataan derivoida.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{f(x+\Delta x)} - \frac{1}{f(x)}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x+\Delta x)}{f(x)f(x+\Delta x)\,\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{f(x)f(x+\Delta x)}$$

$$= \underbrace{-\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{-f'(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{f(x)f(x+\Delta x)}$$

ja

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{f(x) f(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \underbrace{\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)}_{f(x)\,!}}$$

$$= \frac{1}{f(x) \cdot f(x)}$$

siis:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

<u>Osamäärän $\frac{f}{g}$</u>
<u>derivointi</u>

Perustuu siihen, että

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)$$

tulon derivointi

$$= (Df) \cdot \frac{1}{g} + f \cdot D\left(\frac{1}{g}\right)$$

$$= \underbrace{(Df)}_{= f'} \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right)$$

$$= \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}$$

$$= \frac{f'g - fg'}{g^2}. \quad \blacksquare$$