Joukko-opin notaatioita

Olkoon A joukko. Jos x on A:n alkio, kirjoitetaan $x \in A$.
Jos B on joukko, jonka jokainen alkio $x \in B$ toteuttaa $x \in A$, niin kirjoitetaan $B \subset A$; osajoukko.
Joukkojen A ja B leikkaus:

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ ja } x \in B\}.$$

Yhdiste e. unioni:

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ tai } x \in B\}.$$

Jos A ja B ovat joukkoja, niiden erotus on

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}.$$

Yhden pisteen muodostama joukko merkitään $\{a\}$; kahden pisteen $\{a, b\}$ j.n.e.
Tyhjä joukko $\emptyset \subset A$ jokaisella joukolla A. Joukko $\{0\}$ sisältää nollan ja $\{0\} \neq \emptyset$!

Eiken määritelty jatkuvat funktiot avoimilla väleillä $I = (a, b)$

Suljetuille ja puoliavoimille väleillä

$$I_1 = [a, b] \quad (a < b), \quad I_2 = [a, b) \quad (a < b)$$

voidaan puhua jatkuvuudesta käyttämällä reunapisteissä vasenta ja oikeaa jatkuvuutta.

Seuraavaksi voitaisiin tarkastella joukkoja, jotka ovat äärellisiä unioneita avoimista, puoliavoimista, suljetuista väleistä:

Jos $D(f) = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$ niin f on jatkuva omassa määrittelyjoukossaan jos on jatkuva kaikilla väleillä (a_i, b_i), $i = 1, \dots, n$.

! Luonnollinen tapa laajentaa jatkuvuuden määr. intervalleilta.

Jatkuvia funktioita ovat

1. polynomit $\mathbb{R}$:ssä
2. rationaalifunktiot joukossa $\mathbb{R} \setminus \{$nimittäjän nollakohdat$\}$.
3. Kaikki juuri/potenssilausekkeet muotoa

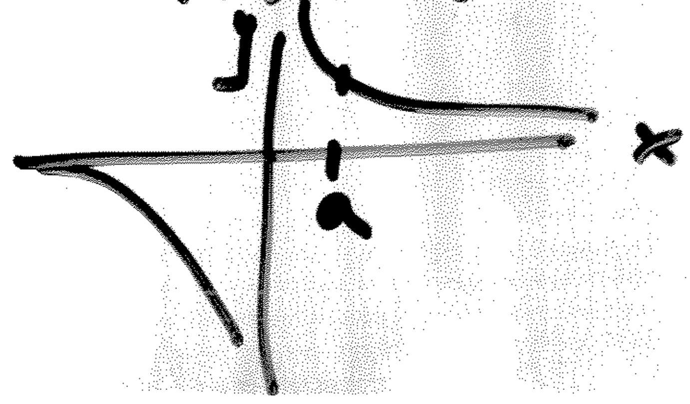
$$x^{m/n} \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$

4. Trigonometriset funktiot sin, cos, tan (omassa määrit. joukossaan).
5. $x \mapsto |x|$ on jatkuva.

<u>Esim</u>: $f(x) = \frac{1}{x}, \; x \neq 0$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$



Lause: f, g ovat j-via.

(i) $f+g$, $f-g$ j-va.

(ii) $(fg)(x) := f(x)g(x)$
niin fg on j-va.

(iii) $k \in \mathbb{R}$, niin $(kf)(x) := kf(x)$
on j-va.

(iv) f/g jatkuva joukossa
$$\{x \in D(f) \cap D(g) : g(x) \neq 0\}$$
(jos y.o. joukko on koostettavissa äärellisestä määrästä intervalleja).

(v) Jos $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D(f)$
niin $[f(x)]^{m/n}$ on j-va.

Huom: Jatkuvien funktioiden joukkoa välillä (a,b) merkitään usein $C(a,b)$. ($C \sim$ continuous). Jos $a = -\infty$ ja $b = +\infty$, niin kirj. $C(\mathbb{R})$. Edellisen lauseen (i) ja (iii) vihjaavat että

$C(a,b)$ on vektoriavaruus; summaus ja skalaarilla kertominen eivät vie "ulos" joukosta $C(a,b)$.

$\Box$

Lause: Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia, sekä lisäksi

$$\underbrace{g(D(g))}_{g\text{:n arvojoukko}} \subset D(f)$$

niin tällöin $f \circ g$;

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

on jatkuva.

Perustelu ohitetaan.

Jatkuvat funktiot suljetuilla, rajoitetuilla väleillä

Väli $[a,b]$, $(a<b)$ on rajoitettu jos $a>-\infty$ ja $b<\infty$.

Joskus puhutaan kompakteista väleistä (tai joukoista).

Reaaliluvuille pätee ns. supremum-ominaisuus:

Jokaisella ylhäältä rajoitetulla osajoukolla

$$A \subset \mathbb{R}$$

on olemassa pienin yläraja.

Tämä yläraja on reaaliluku.

Ts. Jos on olemassa $M < \infty$ jolle pätee

$$\forall x \in A : \quad x < M$$

niin tällöin on olemassa $m \in \mathbb{R}$ siten että

$$\forall x \in A : \quad x \leq m$$

ja ei ole olemassa toista $m' < m$ jolle myös pätisi

$$\forall x \in A : \quad x \leq m'.$$

"Reaalilukujen joukossa on reikiä nolla"

<u>Esim</u>: Ajatelkaa rationaalilukuja $\mathbb{Q}$.

$$A := \{ q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2 \}$$

ylhäältä rij. joukko.

Jo muinaiset kreikkalaiset osasivat todistaa, että ei ole olemassa luonn. lukuja m ja n s.e. $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Seuraava lause perustuu olennaisesti reaalilukujen <u>täydellisyydelle</u> eli "reiättömyydelle":

<u>Lause:</u> Olkoon funktio f jatkuva suljetulla rajoitetulla välillä $[a, b]$, $a < b$. Tällöin on olemassa luvut $x_1, x_2 \in [a, b]$ siten että

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$$

Perustelu:

Askel 1: Funktio f on ylhäältä rajoitettu; l. On olemassa $M < \infty$ s.e.

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b].$$

Oletetaanpa että ei olisi näin.. Siis olisi olemassa jono lukuja

$$x_j \in [a,b]$$

joilla

$$f(x_j) > j \quad j \in \mathbb{N}.$$

Toisaalta, lukuja x_j on äärettömän monta, ja kaikki makaavat suljetulle ja raj. välille $[a,b]$; tulee ahdasta!

Lukujonon tulee kasautua joissain pisteissä $\in [a,b]$.

Oletetaan yksi näistä <u>kasautumispisteistä</u>, nimeltään $\hat{x}$.

Välttämättä $\hat{x} \in [a,b]$.

Tarvittaessa heittämällä pois jonosta $\{x_j\}$ termejä, voidaan olettaa että

$$x_j \to \hat{x} \text{ kun } j \to \infty.$$

Koska f on jatkuva, niin

$$(*) \qquad f(x_j) \to f(\hat{x}) \in \mathbb{R}$$

Toisaalta

$$(**) \qquad f(x_j) > j \quad \forall j$$

koska jono $\{x_j\}$ valittiin näin. Nyt $(*)$ ja $(**)$ ovat ristiriidassa; ÁSKEL 1 PÄTEE.

ASKEL 2:

Siis joukko

$$A := \{ y \in \mathbb{R} : y = f(x), \ x \in [a,b] \}$$

on ylhäältä rajoitettu luvulla M. Supremum-ominaisuuden takia on olemassa $m \in \mathbb{R}$ $(m \leq M)$ joka on A:n pienin yläraja eli supremum:

$$m = \sup A$$

Askel 3: On olemassa luku $x_2 \in [a,b]$ jolla

$$f(x_2) = m.$$

Fakta on ~~Oletetaan~~ että meillä on jono

$\{z_j\} \subset [a,b]$ siten että

(†) $\quad f(z_j) \to m \quad$ kun $j \to \infty$.

Tulee taas ahdasta, äärettömän monta lukua z_j äärellisen pitkällä välillä $[a,b] \Rightarrow$ kasaantuvat jossain pisteessä $\tilde{z} \in [a,b]$. Tarvittaessa heittämällä pois termejä z_j voidaan olettaa että

$$z_j \to \tilde{z} \quad \text{kun } j \to \infty.$$

Koska f on j-va, niin

(††) $\quad f(z_j) \to f(\tilde{z})$ kun $j \to \infty$. Toisaalta raja-arvo on aina yksikäsitt. joten (†) ja (††) seuraa

$$f(\tilde{z}) = m.$$

Nyt on todistettava että

$$f(x) \leq f(\tilde{z}) \quad \forall x \in [a,b].$$

Soveltamalla tätä tietoa funktioon $-f(x)$, saadaan

$$f(\hat{\tilde{z}}) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Tämä todisti väitteen. ∎

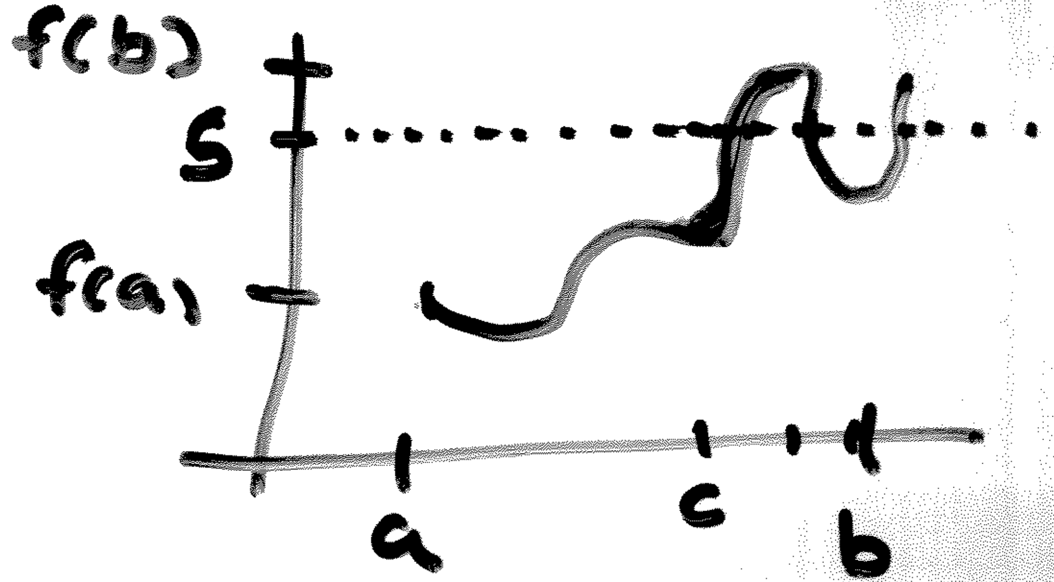
Lause (Väliarvo-ominaisuus)

Jos f on jatkuva välillä $[a,b]$ ja jos $s \in \mathbb{R}$ on luku välillä $[f(a), f(b)]$, niin tällöin on olemassa

$$c \in [a,b]$$

siten että $f(c) = s$.

Graafisesti:



Perustelu: Yleisyyttä rajoittamatta oletetaan että

$$f(a) < s < f(b)$$

Tarkastellaan joukkoa

$$A := \{x \in [a,b] : f(x) \leq s\}.$$

Selvästi $A \subset [a,b]$ ja $A \subsetneq [a,b]$ koska $b \notin A$.

Lisäksi A on rajoitettu joukko ja sillä näin ollen pienin yläraja $m = \sup A$.

Olkoon $\{x_j\}$ nyt jono $A \subset [a,b]$:ssä joka lähestyy vasemmalta lukua m

$$x_j \to m \text{ kun } j \to \infty.$$

Koska f on j-va, niin

(1) $$f(x_j) \to f(m) \leq S$$

Toisaalta, jos $\eta \geq 0$ on kyllin pieni, niin

(2) $$f(m+\eta) > S.$$

Nyt (1) ja (2) kertovat f:n arvon pisteessä m molemmin puolin!

Seuraa $f(m) = S$. ∎