Kuristusperiaate

Lause: Olkoon I avoin väli ($I = (\tilde{a}, b)$) ja f, g, h funktioita $I \to \mathbb{R}$ siten että

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I.$$

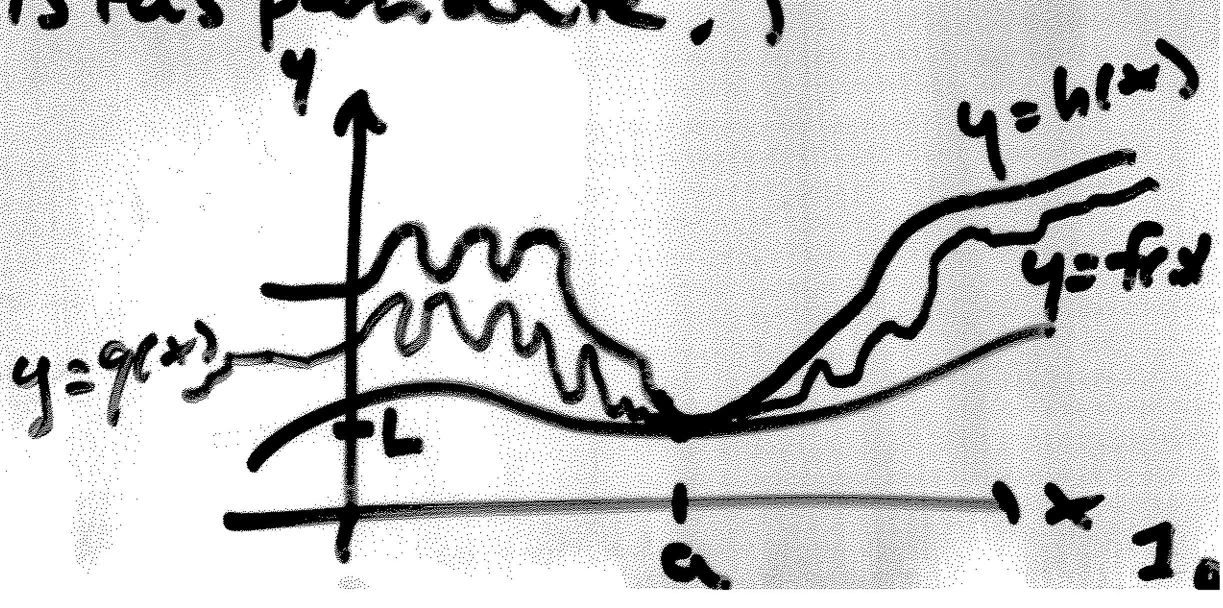
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to a} h(x) = L$$

eräällä $a \in I$.

Tällöin

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

(Kuristusperiaate!)



<u>Esim:</u> $g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Valitaan $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ja $h(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Pätee

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Toisaalta

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

ja $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$.

Kuristusperiaate sanoo

että $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

<u>Esim:</u> $3 - x^2 \leq u(x) \leq 3 + x^2$

$\forall x \in [-1, 1]$. Tällöin

$$3 = \lim_{x \to 0} (3 - x^2) \leq \lim_{x \to 0} u(x) \leq$$

$$\leq \lim_{x \to 0} (3 + x^2) = 3.$$

Raja-arvot äärettömyydessä

Mitä tarkoittaa

(1) $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$?

tai:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \text{ ?}$$

(1) tarkoittaa että ko. raja-arvo ei ole olemassa: raja-arvo on aina luku, ∞ ei ole luku.

(2) tarkoittaa raja-arvoa seuraavan M-ε-määritelmän mukaan:

Määr: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon \in \mathbb{R}$ siten että:

$$x > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

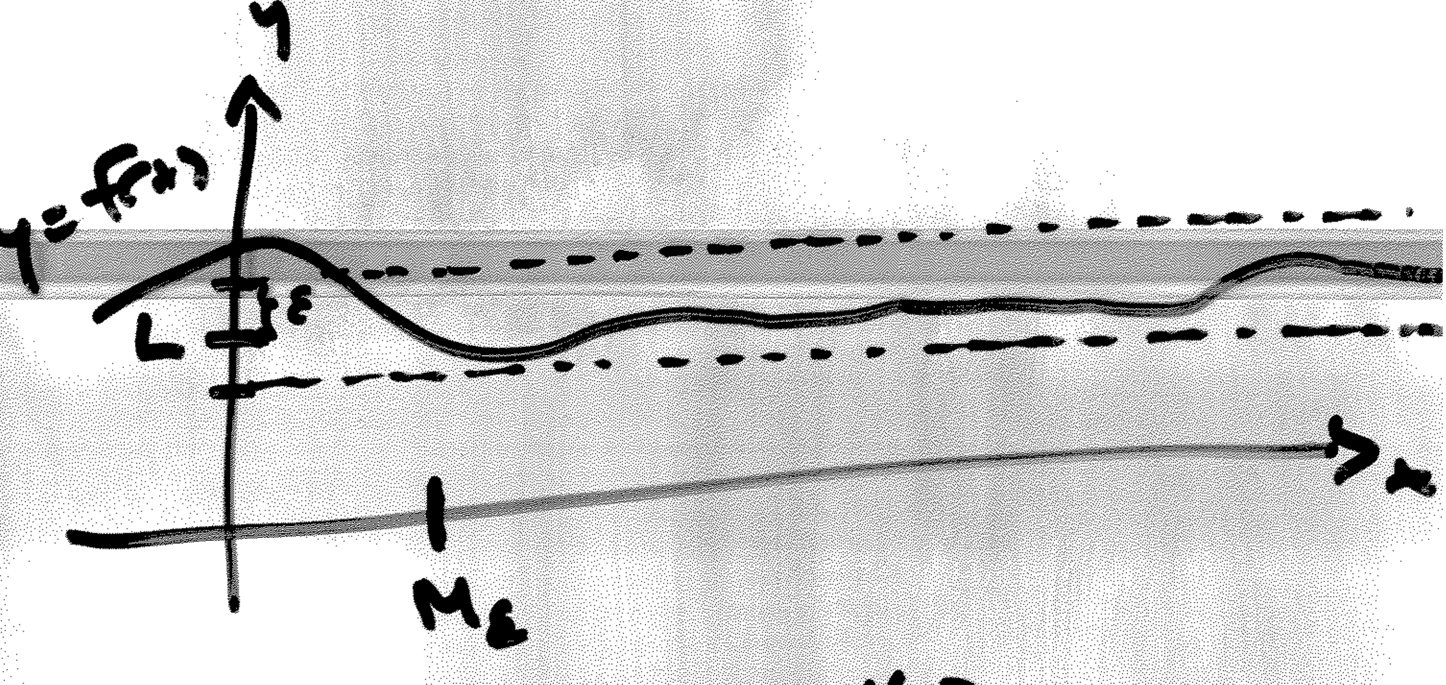
tarkoittaa (määrit. mukaan)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Vastaavasti määritellään

$$\lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Idea: ε-Kalle antaa (vaikka pienen) $\varepsilon > 0$.



Kuvasta näkyy että

$\forall x > M_\varepsilon$ toteutuvat

halutun $|f(x) - L| < \varepsilon$.

<u>Esim:</u> Laske

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ei voida laskea näin:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \neq \frac{\lim_{x\to\infty} x}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Oikea tekniikka

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}$$

$$\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} & x>0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} & x<0 \end{cases}$$

Selvästi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 1}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

koska $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$

Rationaalifunktioiden raja-arvot äärettömyydessä

Esim:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{3x^2+5}$$

Tuijota aina osoittajan ja nimittäjän astelukua!

Go $$\frac{2x^2-x+3}{3x^2+5} = \frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + \cdots}{3x^2 + \cdots}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{5}{x^2}}$$

$$\boxed{OK?} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(3 + \frac{5}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{2 - \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}_{=0}}{3 + \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}}_{=0}}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

Esim: $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 2}{x+1}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \infty.$$

Esim: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

Neliöjuuren "tappamista":
Käytetään hyväksi identiteettiä

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

fiksulla tavalla.

$$\sqrt{x^2+x}-x \overset{x>0}{=} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\overbrace{\sqrt{x^2+x}}^{a}+\overbrace{x}^{b}\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \frac{\overbrace{(x^2+x)}^{a^2}-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}$$

Nyt raja-arvon laskusäännöt jo pelaavat:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 1}{\sqrt{1 + \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}_{=0}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

∎

Jatkuvat funktiot

Määr. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $x \in A$.

(i) x on A:n sisäpiste jos on olemassa avoin väli $I = (a,b)$ joka toteuttaa

$$x \in I \subset A$$

(x:n ympärillä on tilaa liikkua ilman että joudutaan ulos A:sta.)

(ii) jos $x \in A$ mutta x ei ole A:n sisäpiste, niin x on A:n reunapiste

(iii) jos $x \in A$ ja on olemassa avoin väli $I = (a, b)$ siten että

$$x \in I \text{ ja } I \cap A = \{x\}$$

niin tällöin x on A:n <u>eristetty</u> piste.

<u>Esim:</u> $A = [a, b] \cup \{c\}$ jossa $a < b < c$, niin tällöin:

- c on A:n "isoloitu" l. eristetty piste;
- $\{b, c\}$ ovat A:n reunapisteitä
- avoin väli (a, b) on kaikki A:n sisäpisteet.
- Piste a kuuluu A:n reunalle ($a \in \partial A$) mutta ei A:han.

Määrit:

Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on suljettu jos se sisältää kaikki reunapisteensä

A on avoin, jos sen komplementti $\mathbb{R} \setminus A =: A^c$ on suljettu.

Huom: Jokainen avoimen joukon A piste $x \in A$ on A:n sisäpiste. Huomaa että $\partial A = \partial A^c$! (Maalaisjärkeä.)

Esim: $I = (a, b)$ on avoin, komplementti

$$I^c = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$$

on suljettu. Joukko $I' = (a, b]$ ei ole avoin eikä suljettu.

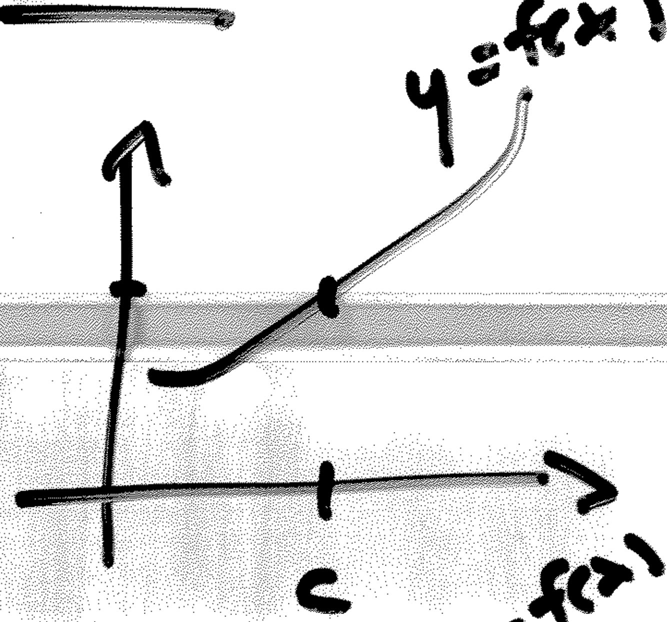
Määr: funktio $f : D(f) \to \mathbb{R}$ ($D(f) \subset \mathbb{R}$) on jatkuva $D(f)$:n (sisä)pisteessä $c \in D(f)$ mikäli

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in D(f)}} f(x) = f(c)$$

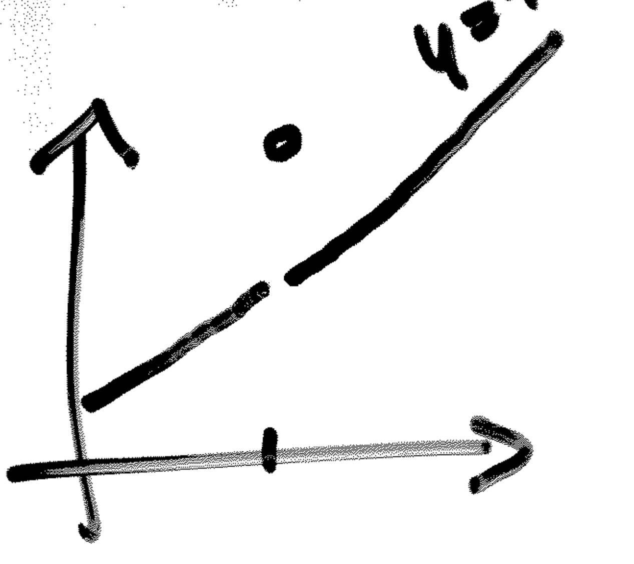
On tärkeää että c on D(f):n kasaupiste; jos c olisi esim. eristetty piste niin $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \in D(f)}} f(x)$

olisi mahdollista laskea!

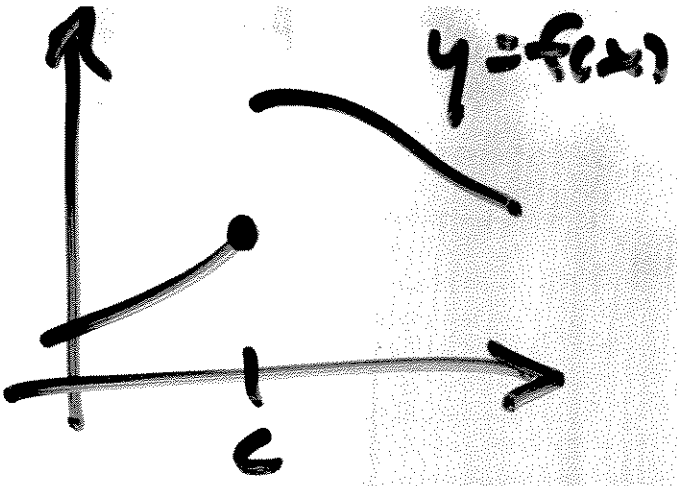
<u>Esim:</u>



On jatkuva pisteessä c



f ei ole jatk. pisteessä c vaikka voitaisiin "korjata" jatkuvaksi.



On vasemmalta puolijatkuva.

Tässä f:ää ei mitenkään voi korjata j-vakri.

<u>Määr</u>: Funktio $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subset \mathbb{R}$ on

(a) <u>vasemmalta</u> jatkuva pisteessä $a \in D(f)$ jos

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

(b) <u>oikealta</u> jatkuva pisteessä $a \in D(f)$ jos

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

Vasem. ja oikean jatkuvuuden tapauksessa voidaan antaa periksi vaatimuksesta että a on $D(f)$:n kasautumispiste: Esimerkiksi

$$I = [0,1), \quad a = 0,$$

$$D(f) = I \text{ jossa } f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{1-x} = 1 = f(0)$$

oikealta puoli-j-va vaan ei vasemmalta.

Jos a olisi $D(f)$:n eristetty piste niin tällöin vasen ja oikea jatkuvuus a:ssa olisi mieletöntä.

<u>Määrit.</u> Funktio f on jatkuva välillä $I = (a, b)$ jos

$$I \subset D(f)$$

ja lisäksi f on jatkuva pisteessä c, kaikilla $c \in I$.