Raja-arvot

Tarkastelemme reaalimuuttujan $x \in \mathbb{R}$ reaaliarvoisia funktioita: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

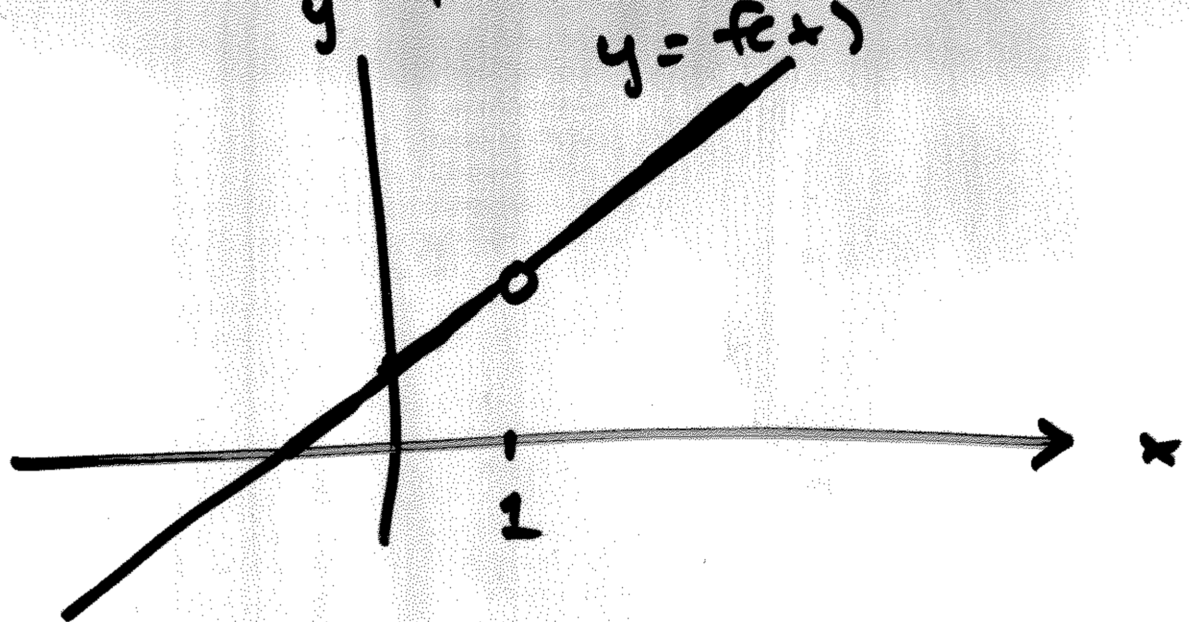
Esim: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Kuinka f käyttäytyy erikoispisteensä $x=1$ ympäristössä?

Huomataan että $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

Voidaan piirtää suora



Suuri kiusaus olisi ajatella että $f(1) = 2$, mutta tätä pitää vastustaa **ankarasti**!

Jotain erikoista kuvassa 2 on, jos huomioonottaen kuinka f määriteltiin.

<u>Epämuodollisesti:</u>

Jos funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (määrittelyjoukossaan $D(f) \subset \mathbb{R}$) ja erään $a \in \mathbb{R}$ välillä vallitsee seuraava suhde:

kun x viedään "lähelle" lukua a, niin $f(x)$ tulee "lähelle" lukua $L \in \mathbb{R}$

niin sanotaan että

$$\lim_{x \to a} f(x) = L;$$

l. f:n <u>raja-arvo</u> pisteessä x on L.

Täsmällinen raja-arvon määritelmä annetaan Weierstrassin $\delta-\varepsilon$ - "loitsun" avulla:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 :$$
$$|x-a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$
$$\underset{df}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to a} f(x) = L.$$

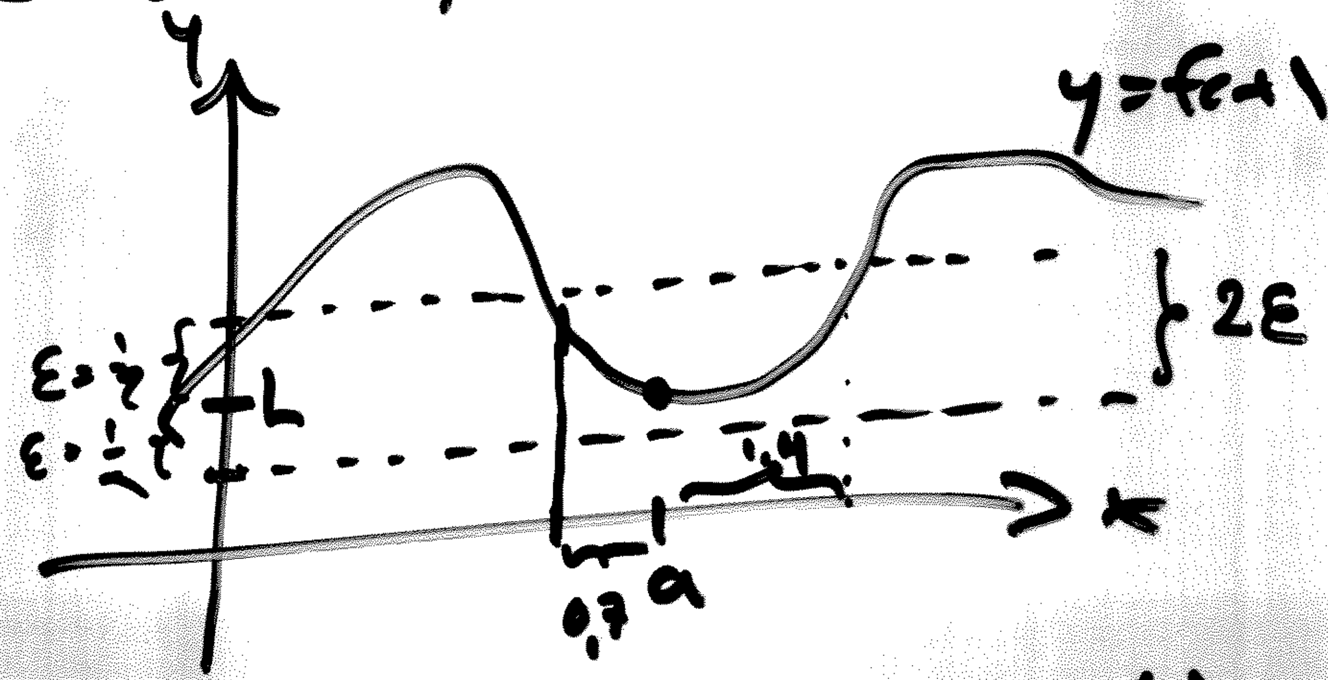
Pelitilanne:

ε-Kalle ja
δ-Ville, kaksi
pelaajaa.

Annettu funktio f, piste a
ja arvo L.

<u>ε-Kalle:</u> $\varepsilon = \frac{1}{2}$

δ-Ville piirtää kuvan:



δ-Ville vakiittaa: ($\varepsilon = \frac{1}{2}$)

$$\delta_{\frac{1}{2}} = 0{,}7.$$

Yhdessä tarkistavat:

aina kun

$$|x-a| < 0{,}7 \Rightarrow |f(x)-L| < \tfrac{1}{2}$$

ε-Kalle pistää paremmaksi:

$$\varepsilon = 0{,}001$$

Tällöin varmistuu, että

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq L$$

(tai mitään raja-arvoa ei ole pisteessä a; tai raja-arvo on muuta $\neq L$).

b) Peli jatkuisi äärett. kauan; tällöin pätee

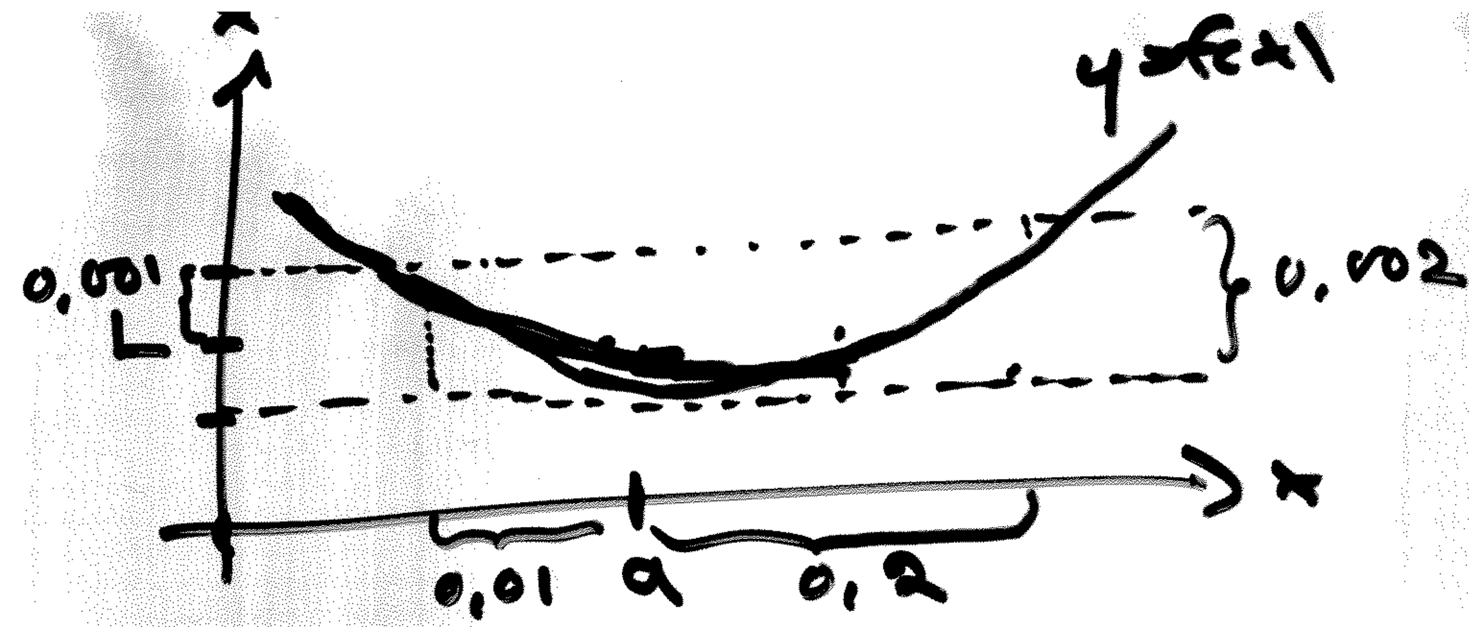
$$\lim_{x \to a} f(x) = a.$$

Kuinka raja-arvoja lasketaan käytännössä?

Monissa tapauksissa raja-arvo voidaan oikein arvata muokkaamalla ja sieventämällä funktiota, josta raja-arvo otetaan.

Arvaus $\neq$ Todistus

Arvausta pitäisi aina todistaa δ-ε:in avulla.



(Suurennettu kuva a:n ympäristössä.)

δ-Ville nokittaa: (ε = 0,001)

$$\delta_{0,001} = 0{,}01.$$

Tarkistetaan pojat:

$$|x-a| < 0{,}01 \Rightarrow |f(x)-L| < 0{,}001$$

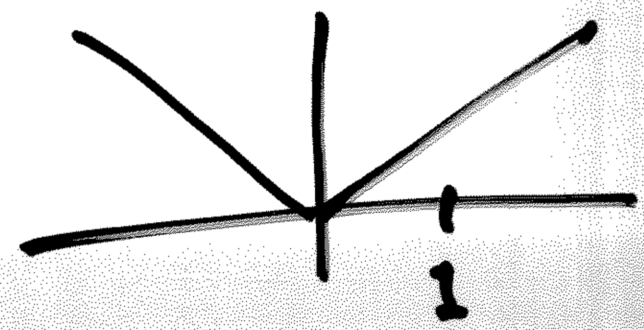
Jne.

Kaksi vaihtoehtoa:

a) Jossain kohdassa ε-Kalle iskee niin "villin" ε > 0 että δ-Ville ei enää pysty nokittamaan: 5.

Esim: $f(x) = |x|$

laske $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.



Jatkuvuuden perusteella näyttäisi että

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1.$$

Ongelma: Jotta tietäisimme mitä jatkuvuus on (tai että $f(x) = |x|$ on j-va), meillä tulisi olla jo raja-arvon määritelmä käsillä.

Esim:

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$$

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a},\quad \begin{matrix}x\neq a\\ x\neq 0\end{matrix}$$

Manipuloidaan hieman:

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\frac{\left(\frac{a-x}{ax}\right)}{x-a}$$

$$=\frac{a-x}{ax}\cdot\frac{1}{(x-a)}=-\frac{1}{ax}$$

kaikilla $x\neq a$.

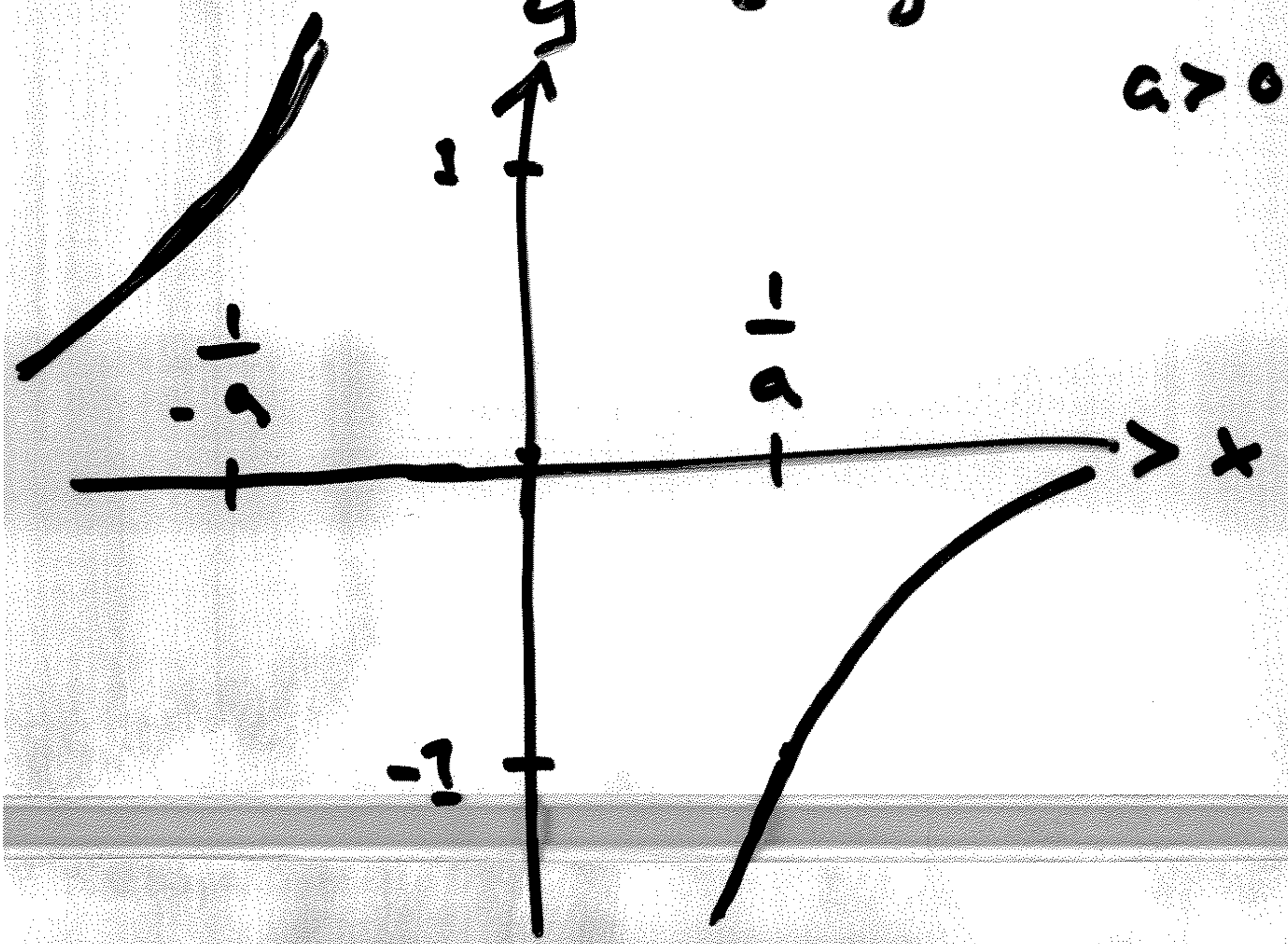
Toisin sanoen, funktio f laajennetaan suurempaan määrittelyjoukkoon funktioksi

$$\tilde{f}(x)=-\frac{1}{ax};\quad \begin{matrix}x\in\mathbb{R}.\\ x\neq 0\end{matrix}$$

$\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}\setminus(\{a\}\cup\{0\})$, $\mathcal{D}(\tilde{f})=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$=\mathbb{R}\setminus\{0,a\}$

Funktio $\tilde{f} = -\frac{1}{ax}$, $x \neq 0$.
on (ainakin piirtämällä katsottuna) jatkuva



Selvästi $(a \neq 0)$

$$\tilde{f}(a) = \lim_{x \to a} f(x).$$

Päätellään $(a \neq 0)$

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = -\frac{1}{a^2}.$$

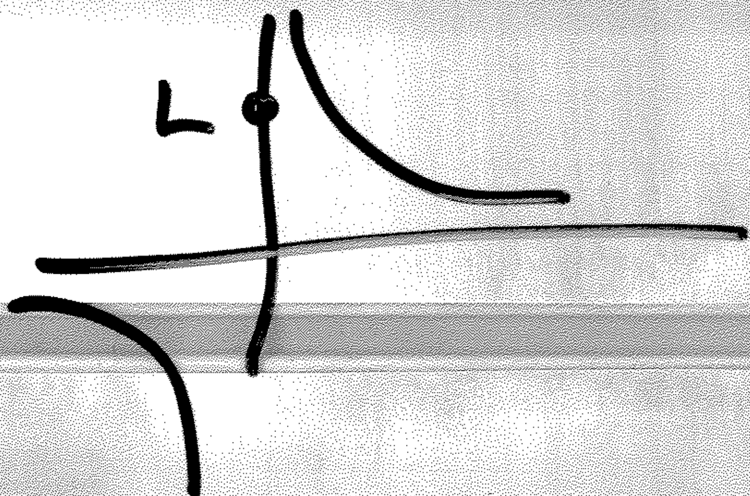
Huom:

Saattaa olla, että $f(x)$ on määritelty pisteen $x=a$ molemmin puolin, mutta

$$\lim_{x\to a} f(x) \nexists$$

(ei ole olemassa).

Esim. $f(x) = \frac{1}{x}$



Esim:

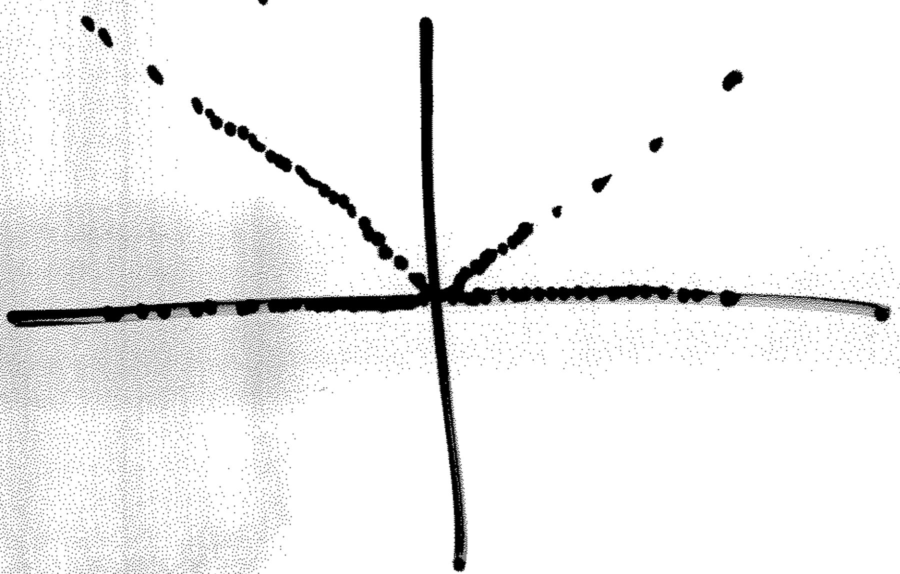
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2 \neq 3 = f(3).$$

Esim: $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{jos } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jos } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

jossa $\mathbb{Q}$ on rationaali-lukujen joukko.



Itseasiassa

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Jos $a \neq 0$, niin

$$\lim_{x \to a} f(x) \not\exists$$

Esim: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x) \not\exists$ koska

koska raja-arvo "halauttaisi"
olla $= 0$ jos $x \to 0$
negatiivisten reaaliakselin
puolelta; mutta $= 1$
jos posit. reaaliakselin
puolelta.

Havainto:

Jos $\lim_{x \to a} f(x) = L$,

niin tällöin jokainen
lukujono $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$
toteuttaisi myös

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L;$$

Loogisena seurauksena:
Jos olisi kaksi lukujonoa
$x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ $\quad y_n \xrightarrow{n\to\infty} a$
joilla pätisi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

kun meillä olisi kaksi yhtä vahvaa kandidaattia raja-arvoksi $\lim_{x\to a} f(x)$.

Mahdotonta, raja-arvoja voi olla korkeintaan yksi; raja-arvo ei olemassa.

Laskimella kokeilemalla raja-arvoa ei voi löytää, koska liian vähän "testipisteitä" funktion käytöksen kuvaamiseksi.

Vasemman ja oikean puoleiset raja-arvot

Määr: Funktion f vasen raja-arvo

$$L = \lim_{x \to a-} f(x)$$

jos

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 :$$

$$a - \delta_\varepsilon < x < a \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Samoin

$$L = \lim_{x \to a+} f(x)$$

jos
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 :$$
$$a < x < a + \delta_\varepsilon \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Seuraus

$\lim_{x \to a} f(x)$ $\exists$

jos ja vain jos

(i) $\lim_{x \to a-} f(x) = L$ $\exists$

(ii) $\lim_{x \to a+} f(x) = R$ $\exists$

(iii) $L = R$.

Seuraa hetken pohdinnalla δ:n ja ε:n kanssa.

Lause: $\lim_{x \to a} f(x) = L$; $\lim_{x \to a} g(x) = M$

(i) $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$.

(ii) $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = LM$

(iii) Jos $k \in \mathbb{R}$ niin

$$\lim_{x \to a} kf(x) = kL.$$

($g(x) = k \ \forall x$, sovella (ii).)

(iv)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{jos } M \neq 0$$

(v)

$$\lim_{x \to a} \left[f(x)\right]^{m/n} = L^{m/n}$$

(vi) Jos eräässä pisteen a ympäristössä pätee

$$f(x) \leq g(x)$$

niin tällöin $L \leq M$.

Perustellaan (i):

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \underbrace{\lim_{x\to a} f(x)}_{=:L} + \underbrace{\lim_{x\to a} g(x)}_{=:M}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen.

- koska
$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$
niin on olemassa $\delta_\varepsilon^1 > 0$ siten että
$$|x-a| < \delta_\varepsilon^1 \Rightarrow |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- koska
$$\lim_{x\to a} g(x) = M$$
niin on olemassa $\delta_\varepsilon^2 > 0$ siten että
$$|x-a| < \delta_\varepsilon^2 \Rightarrow |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olkoon $\delta_\varepsilon := \min(\delta_\varepsilon^1, \delta_\varepsilon^2)$.

Tällöin $|x-a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$$|f(x) + g(x) - L - M|$$

$$= |(f(x) - L) + (g(x) - M)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - L|}_{\varepsilon/2} + \underbrace{|g(x) - M|}_{\varepsilon/2}$$

$$= \varepsilon. \qquad \blacksquare$$