Matriisin ominaisarvojen määrääminen

(kertausta ja jatkoa eilisen luennolta.)

Määr: Olkoon A $n \times n$-matriisi. Tällöin funktio

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

on matriisin A karakteristinen funktio.

Joissain kirjoissa määrit.

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

mutta tämä on epäoleenn. ero, koska $\underset{n \times n}{T}$

[illegible]

$$\det(-T) = \det(\underset{n\times n}{-I} \cdot \underset{n \times n}{T})$$

$$= \det(\underset{n \times n}{-I}) \cdot \det(T)$$

jossa

$$\det(-I) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n.$$

Kuten jo todettiin,

λ on A:n ominaisarvo

$\Leftrightarrow$ $(\lambda I - A)\bar{x} = 0$

on epätriv. ratkaisu $\bar{x} \neq \bar{0}$

$\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I - A) = 0.$

<u>Lause</u>: Karakteristisen funktion nollakohdat ovat täsmälleen ominaisarvot.

Karakteristinen funktio $\det(\lambda I - A)$ on <u>aina</u> <u>polynomi</u> koska determinantti koostuu äärellisestä määrästä kerto- laskuja ja yhteenlaskuja.

Lause: $n \times n$-matriisin karakteristinen polynomi (l. funktio) on astetta n.

Esim: kehitä eka pystyrivin suhteen

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \overbrace{(\lambda - a_{11})}^{\text{astetta}} \overbrace{\begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}}^{\text{astetta 2}}$$

$$+ a_{21} \begin{vmatrix} -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$- a_{31} \begin{vmatrix} -a_{12} & -a_{13} \\ \lambda - a_{22} & -a_{23} \end{vmatrix}$$

alempaa astetta.

Yleinen tapaus $n \times n$-matriisille toimii samalla logiikalle – ns. "induktiotodistus".

Bo

Esim: Erään 6×6-matriisin karakteristinen polynomi on

$$f(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4.$$

Ratkaistaan ominaisarvot

$$0 = \lambda^4(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = \lambda^4(\lambda - 6)(\lambda + 2).$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 6$ $\lambda_3 = -2$ ovat ominaisarvot.

Yleisessä tapauksessa $n \geq 5$ ratkaisukaavaa ei ole olemassa. Tarvitaan numeerisia menetelmiä, joille mikä tahansa polynomiyhtälö voidaan ratkaista mielivaltaisen tarkasti.

$\longrightarrow$ Newtonin menetelmä.
ym. ym.

Määr: Jos $\lambda \in \mathbb{C}$ toteuttaa

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

ja on lisäksi k-kertainen juuri, niin sanotaan että λ:n algebrallinen kertaluku on k.

Aina pätee: Jos λ on A:n ominaisarvo, niin

$$\text{alg. kertaluku} \geq \text{geom. kertaluku}$$

jossa

$$\text{geom. k.l} = \dim \mathcal{N}(\lambda I - A).$$

Perustelu ohitetaan.

Huom: Vaikka A olisi reaalinen (kaikki sen matriisielementit olisivat reaalilukuja) niin

A:n ominaisarvot eivät välttämättä ole reaalisia.

Seuraa reaalisuudesta, että polynomi

$$\det(\lambda I - \underset{n\times n}{A})$$

$$= p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + \dots p_n\lambda^n$$

on reaalikertoiminen:

$$p_0, p_1 \dots p_n \in \mathbb{R}.$$

Tällöin voi olla kompleksisia juuria, jotka kuitenkin esiintyvät konjugaatti-pareittain (kompleksilukuosuus viikko 1.)

Matriisien similaarisuus

<u>Määr:</u> Kaksi $n\times n$-matriisia A ja B ovat similaarisia jos $\exists$ kääntyvä matriisi $\underset{n\times n}{P}$ s.e. $A = PBP^{-1}$.

- Matriisien similaarisuus on ekvivalenssirelaatio.

- Kuvaus

$$B \longmapsto PBP^{-1}$$

on ns. similariteettimuunnos ja P on tässä similariteettimuunnosmatriisi.

Geom. huomautus:

Kaksi similaarista matriisia A ja B voidaan ajatella kuvaavan saamaa lineaarista kuvausta $T(\bar{x})$ mutta esiteltynä eri kannassa.

<u>Lause</u>: Similaarisilla matriiseilla A ja B on samat karakteristiset polynomit

<u>Perustelu:</u> $A = PBP^{-1} \iff$
$B = P^{-1}AP$

$$\lambda I - B = \lambda I - P^{-1}AP$$
$$= \lambda \cdot P^{-1} \cdot P - P^{-1}AP$$
$$= P^{-1} \cdot \lambda I \cdot P - P^{-1}AP$$
$$= P^{-1} (\lambda I - A) \cdot P$$

Determinantti yht. molemmin puolin

$$\det(\lambda I - B)$$
$$= \det P^{-1} \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det P$$
$$= (\det P^{-1} \cdot \det P) \cdot \det(\lambda I - A)$$
$$= \det(P^{-1}P) \cdot \det(\lambda I - A)$$

$= 1\,!$

Määr: Matriisi $\underset{n\times n}{A}$ on **diagonalisoituva**, jos se on similaarinen jonkin diagonaalimatriisin

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

kanssa.

1.
$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{bmatrix}$$

2.
$$p(t) = p_0 + p_1 t + \cdots + p_k t^k$$

niin
$$p(D) = p_0 I + p_1 D + \cdots + p_k D^k.$$

ja edelleen käyttämällä 1°:

$$= \begin{bmatrix} p(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(d_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p(d_n) \end{bmatrix}$$

3° Jos eksponenttifunktio määritellään "Taylor-sarjana"

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \frac{t^k}{k!} + \cdots$$

niin myös matriisille

$$e^D = \underline{I} + D + \frac{D^2}{2!} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{d_n} \end{bmatrix}.$$

Jos matriisi on diagonalisoituva, niin sillä voidaan lähes yhtä helposti laskea kuin diagonaalimatriisilla!

$$A = PDP^{-1}$$

jossa D diagonaalinen, niin

$$A^k = \underbrace{PD\underbrace{P^{-1} \cdot P}_{=I}DP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1}}_{k \text{ kpl.}}$$

$$= PD^kP^{-1}$$

$$p(A) = p_0 \cdot P \cdot P^{-1} + P \cdot p_1 D \cdot P^{-1} + \ldots + P \cdot p_k D^k \cdot P^{-1}$$

$$= P(p_0 I + p_1 D + \ldots + p_k D^k)P^{-1}.$$

Siis nähdään:

jos $A = PDP^{-1}$

niin $p(A) = P\,p(D)\,P^{-1}$

jokaisella polynomilla $p(t)$.

Sama pätee mm. exp.-funktiolle. (käyttöä mm. differentiaaliyhtälösysteemeissä myöh. tällä kurssilla.)

Varoitus: Kaikki matriisit eivät ole diagonalisoituvia!

Esim: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ei ole.

Lause: Matriisi $A_{n \times n}$ on diagonalisoituva jos ja vain jos A:n ~~[illegible]~~ ominaisvektorit virittävät avaruuden $\mathbb{C}^n$

(ts. ominaisvektorit muodostavat kannan n-ulott. vektoreille.)

Kun A <u>on</u> diagonalisoituva,

$$A = PDP^{-1} \quad \text{jossa}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ja

$$P = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \cdots \ \bar{v}_n];$$

$\lambda_1 \ldots \lambda_n$ ovat A:n ominaisarvot ja $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n$ niitä vastaavat ominaisvektorit.

<u>Perusteluja:</u>

Matriisi P on kääntyvä jos ja vain jos ominaisvektorit todellakin ovat lin. vapaita & virittävät koko avaruuden $\mathbb{C}^n$.

Kuinka sitten saadaan
$A = PDP^{-1}$? Sama kuin

$$AP = PD$$

Vasen puoli

$$AP = A\,[\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \cdots\ \bar{v}_n]$$

$$= [A\bar{v}_1\ A\bar{v}_2 \cdots A\bar{v}_n]$$

$(A\bar{v}_j = \lambda_j \bar{v}_j)$

$$= [\lambda_1\bar{v}_1\ \lambda_2\bar{v}_2 \cdots \lambda_n\bar{v}_n]$$

$$= [\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \cdots \bar{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= PD$$

$\blacksquare$

Seurauslause: Jos matriisilla $A_{n\times n}$ on n. kpl erisuuria ominaisarvoja, niin se on diagonalisoituva

Perustelu:
Erisuuriin ominais-arvoihin liittyvät ominais-vektorit lin. riippumattomia (eilinen Lause).
Koska näitä on n kpl, koko avaruus $\mathbb{C}^n$ tulee ominaisvekt. virittämäksi.
Väite seuraa edell. Lauseesta ∎

Lause: Riittävä ja välttämätön ehto $A_{n\times n}$:n diagonalisoituvuudelle on, että jokaisen erisuuren ominaisarvon

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p, \quad p \leq n$$

algebrallinen ja geometrinen multiplisiteetti ovat yhtäsuuria.

Perustelu ohitetaan.