4.10.2006

(Jatkoa edellisen luennolta)

Siis

$$A = E_p E_{p-1} \cdots E_1$$

eräille elementaarimatriiseille, koska

$$A^{-1} = (E_p' E_{p-1}' \cdots E_1')^{-1}$$

$$= \underbrace{(E_1')^{-1}}_{= E_p} \cdot \underbrace{(E_2')^{-1}}_{= E_{p-1}} \cdots \underbrace{(E_p')^{-1}}_{= E_1}$$

jossa käytetään matriisitulon ominaisuutta

$$(CD)^{-1} = D^{-1} C^{-1}$$

("dressing – undressing" pätee!)

Laskétaan myös

$$\det AB = |AB| \qquad (*)$$

$$= | E_p \underbrace{E_{p-1} \cdots E_1 B}|$$

1.

Jos E_p vastaa rivioperaatiota, niin käyhän eli

$$\det E_p = \begin{cases} -1 & \text{jos } \hat{=} \text{ rivien vaihto} \\ r & \text{jos } \hat{=} \text{ rivin kertominen } r\text{:llä, } r \neq 0 \\ 1 & \text{jos muunlainen lis. toiseen riviin} \end{cases}$$

[Vaatisi muoron (askeen, että kirjoitetaan eri tyyppiset E_p-matriisit eksplisiittisesti]

Saadaan jatketaan kaavan (*) päättelyä

$$= |E_p| \cdot |E_{p-1} \cdots E_1 B|$$

$$= |E_p| \cdot |E_{p-1}| \cdot |E_{p-2} \cdots E_1 B| \quad (**)$$

$$= \ldots$$

$$= |E_p| \cdot |E_{p-1}| \cdot |E_{p-2}| \cdots |E_1| \cdot |B|.$$

Erityisesti pätee (jos $B = I$)

20 $|E_p \cdots E_1| = |E_p| \cdot |E_{p-1}| \cdots |E_1|$

Soveltamalla tätä esitystapaa kaavaan (**) saadaan

$$= |\underbrace{E_p \cdots\cdots E_1}_{=A}| \cdot |B|$$

$$= |A| \cdot |B|.$$

Siis todistettiin

$$|AB| = |A| \cdot |B|. \quad \blacksquare$$

<u>Huomautus:</u>

Matriisit eivät yleisesti kommutoi, vaan

$$AB \neq BA$$

Kuitenkin

$$\det(AB) = \overbrace{\det A \cdot \det B}^{\text{komplexiluvut kommutoi}}$$
$$= \det B \cdot \det A = \det(BA).$$

Lineaaristen yhtälöryhmän ratkaiseminen determinanteilla — Cramerin sääntö

Olkoon A $n \times n$-matriisi. Ratkaistaan $A\bar{x} = \bar{b}$.

Kirjoitetaan

$$A = [\bar{a}_1 \; \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_i \; \bar{a}_n]$$

ja merkitään

korvataan!

$$A_i(\bar{b}) := [\bar{a}_1 \; \bar{a}_2 \cdots \bar{b} \cdots \bar{a}_n]$$

i:s pystyrivi

Lause: Jos A on kääntyvä $n \times n$-matriisi, ja $\bar{x} = [x_1 \cdots x_n]^T$ olisi yhtälöryhmän $A\bar{x} = \bar{b}$ ratkaisu, niin

$$x_i = \frac{\det A_i(\bar{b})}{\det A}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Perustelu:

Merkitään $n \times n$ - identiteetti-matriisin pystyrivejä

$$\underset{n \times n}{I} = [\bar{e}_1 \; \bar{e}_2 \; \cdots \; \bar{e}_n]$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{i:s paikka} \\ \downarrow \end{array}$$

i:n

$$I_i(\bar{x}) := [\bar{e}_1 \; \bar{e}_2 \cdots \bar{x} \cdots \bar{e}_n].$$

Lasketaan

$$A \cdot I_i(\bar{x})$$

i. kohta ↓

$$= [A\bar{e}_1 \; A\bar{e}_2 \cdots \; A\bar{x} \; \cdots A\bar{e}_n]$$

$$= [\bar{a}_1 \; \bar{a}_2 \; \cdots \; \bar{b} \; \cdots \; \bar{a}_n]$$

$$= A_i(\bar{b}).$$

Siis $A \cdot I_i(\bar{x}) = A_i(\bar{b})$; ottamalla det molemmin puolin, saadaan

$$\det I_i(\bar{x}) = \frac{\det A_i(\bar{b})}{\det A}$$

... paikka

Nyt

$$I_i(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & & | \\ | & 0 & \cdots & x_3 & & | \\ | & | & & \vdots & & | \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & & 1 \end{bmatrix}$$

jonka determinantti kehitettynä i. pystyrivin mukaan $= x_i$. (laske itse jos et usko.) ∎

<u>Esim:</u> Etsi kaikki luvut $s \in \mathbb{C}$ joilla yhtälöllä

$$\begin{cases} 3s x_1 - 2x_2 = 4 \\ -6x_1 + s x_2 = 1 \end{cases}$$

on <u>yksikäsitt.</u> ratkaisu.

Ts. etsi ne $s \in \mathbb{C}$ joille matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{bmatrix}$$

on kääntyvä. Etsi vast. ratkaisu.

A kääntyvä $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

eli $3s^2 - 12 \neq 0 \Rightarrow s \neq \pm 2$.

Ratkaisu:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{4s + 2}{3s^2 - 12}, \quad s \neq \pm 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{3s + 24}{3s^2 - 12}, \quad s \neq \pm 2.$$

Kaava matriisin käänteismatriisille

Olkoon A $n \times n$-matriisi joka on kääntyvä.

Merkitään

$$A^{-1} = [\bar{b}_1\ \bar{b}_2 \cdots \bar{b}_n]$$

jossa $\bar{b}_j = [b_{1j}\ b_{2j} \cdots b_{nj}]^T$

(siis $A^{-1} = [b_{jk}]_{j,k}$)

Koska $A^{-1} \cdot A = I$ ja $A \cdot A^{-1} = I$. Saadaan

$$A\,[\bar{b}_1\ \bar{b}_2 \cdots \bar{b}_n] = [\bar{e}_1\ \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_n]$$

Laskemalla matriisitulo saadaan

$$A\bar{b}_j = \bar{e}_j \quad j = 1, \ldots n.$$

Nämä on n kpl. yhtälöryhmiä

ratkaisemiseen voidaan
käyttää Cramerin sääntöä!
(Jos tunnetaan vektorit $\bar{b}_j$,
niin tunnetaan A^{-1}!).

Cramerin sääntö: $\forall j$

$$b_{ij} = \frac{\det A_i(\bar{e}_j)}{\det A}$$

ja itseasiassa kehittämällä
$\det A_i(\bar{e}_j)$ j:nnen pysty-
vektorinsa mukaan, saadaan

$$\det A_i(\bar{e}_j) = (-1)^{j+i} \left|A_{ji}\right| =: C_{ji} \quad \forall i,j=1,\dots,n.$$

eli kofaktori joka liittyy
matriisin A paikassa (j,i)
olevaan elementtiin $a_{j,i}$.

(Fellini!) $\longrightarrow$ $8\frac{1}{2}$

Siis $A^{-1} = [b_{ij}]$

jossa $b_{ij} = \dfrac{c_{ji}}{\det A}$

eli

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & & & \\ c_{1n} & \cdots & & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Huomaa että kofaktorit esiintyvät transponoidussa järjestyksessä!

Matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit

Määr: Olkoon A $n \times n$-matr. Vektori $\bar{x} \neq \bar{0}$ on A:n ominaisvektori, jos on olemassa $\lambda \in \mathbb{C}$ siten että

(*) $$A\bar{x} = \lambda\bar{x}.$$

Jos λ toteuttaa yhtälön (∗) eräällä $\bar{x} \neq 0$, niin silloin λ on ominaisvektoria $\bar{x}$ vastaava <u>ominaisarvo</u>.

<u>Lause</u>: Diagonaalisen tai yläkolmiomatriisin ominaisarvot ovat sen diagonaalielementit.

Perustelu helteen päästä.

<u>Määrit</u>: Olkoon λ matriisin A ominaisarvo. Tällöin avaruutta

$$\mathcal{N}(\lambda I - A) \neq \{0\}$$

jossa

$$\lambda I - A := \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}.$$

kutsutaan A:n ominaisarvoon λ <u>liittyväksi ominaisavaruudeksi</u>. Lukua

$\dim \mathcal{N}(\lambda I - A)$

kutsutaan λ:n <u>geometr. kertaluvuksi</u>

10

Esim: A $n\times n$-matriisi.

$$A := \alpha I \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Etsi ominaisvektorit ja ominaisarvot.

Etsi λ joilla yhtälöllä

$$(\lambda I - A)\bar{x} = 0$$

(eli $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$) on epätriviaali ratkaisu $\bar{x} \neq 0$.

Nyt epätriv. ratkaisu on olemassa $\Longleftrightarrow$

$\lambda I - A$ ei ole kääntyvä

$\Longleftrightarrow$

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Jos nyt $A = \alpha I$

$$\lambda I - A = (\lambda - \alpha) I$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda-\alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda-\alpha \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n$$

Siis

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \alpha)^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \alpha.$$

Ominaisvektori joka vastaa $\lambda = \alpha$ ominaisarvoa:

$$A\bar{x} = \alpha\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

Siis kaikki vektorit $\bar{x} \neq 0$ ovat vastaavia ominaisvektoreita;

$$\mathcal{N}(\alpha I - \underset{n\times n}{A}) = \mathbb{C}^n.$$

Jos A olisi yläkolmiomatriisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Muodostetaan yhtälö

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & * & & * & * \\ 0 & \lambda - a_{22} & & * & * \\ | & & \ddots & & * \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Polynomin aste n.

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots \cdots (\lambda - a_{nn}) = 0$$

Ratkaisut

$$\lambda = a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots a_{nn}$$

ovat A:n ominaisarvoja.
Tämä todistaa lauseen
joka annettiin aiemmin ■

<u>Lause</u>: Olkoon A $n \times n$-matr.
jonka ominaisvektorit
$\bar{v}_1, \ldots \bar{v}_r$
vastaavat ominaisarvoja

$\lambda_1, \ldots \lambda_p.$

Jos kaikki ominaisarvot $\lambda_1 \ldots \lambda_p$ ovat keskenään eri suuria, niin joukko

$$\{\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_r\}$$

on lin. vapaa.

<u>Perustelu</u>:

Tarvittaessa muuttamalla ominaisarvojen järjestystä, voidaan olettaa että

$$\{\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_p\}$$

on lin. vapaa, mutta joukko

$$\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{p+1}\}, \text{ p} < r.$$

on lin. riippuva — olettaen että lauseen väite olisi pötyä.

Siis olisi vakiot $c_1 \dots c_p$
s. e.

(1) $$\bar{v}_{p+1} = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 \cdots c_p\bar{v}_p$$

Kerrotaan molemm. puolet
A:lla, ja muistetaan

$$A\bar{v}_j = \lambda_j\bar{v}_j$$

$$A\bar{v}_{p+1} = c_1A\bar{v}_1 + c_2A\bar{v}_2 + \dots + c_pA\bar{v}_p$$

=>

$$\lambda_{p+1}\bar{v}_{p+1} =$$

(2) $$c_1\lambda_1\bar{v}_1 + c_2\lambda_2\bar{v}_2 + \dots + c_p\lambda_p\bar{v}_p$$

Kerrotaan (1) luvulla λ_{p+1}
ja yhdistetään (2):een:

$$c_1\lambda_{p+1}\bar{v}_1 + c_2\lambda_{p+1}\bar{v}_2 + \dots c_p\lambda_{p+1}\bar{v}_p = 1S_0$$

$$= c_1 \lambda_1 \bar{v}_1 + c_2 \lambda_2 \bar{v}_2 + \cdots + c_p \lambda_p \bar{v}_p$$

eli

$$c_1 (\overbrace{\lambda_{p+1} - \lambda_1}^{\neq 0}) \bar{v}_1 + c_2 (\overbrace{\lambda_{p+1} - \lambda_2}^{\neq 0}) \bar{v}_2 + \cdots + c_p (\overbrace{\lambda_{p+1} - \lambda_p}^{\neq 0}) \bar{v}_p = \bar{0}.$$

Koska joukko $\{\bar{v}_1, \ldots \bar{v}_p\}$ lin. vapaa ja toisaalta $\lambda_{p+1} \neq \lambda_j \; \forall j$

seuraa

$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots c_p = 0.$$

Mutta tällöin $\bar{v}_{p+1} = \bar{0}$ yhtälöllä (1).

Mahdotonta, ominaisvektori ei koskaan nolla!

Ristiriita todistaa väitteen. ∎