Determinantit 3.10.2006

Olkoon A $n \times n$-matriisi.

Matriisin A determinantti

$$\det A$$

on eräs kompleksiluku, joka muodostuu matriisin A elementeistä

$$[a_{jk}]_{j,k} = A.$$

<u>$n=1$</u>: $A = [a_{11}]$

$\mathrm{Det}\, A := a_{11}$

<u>$n=2$</u>: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\mathrm{Det}\, A := a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Yleinen tapaus

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(Toinen merkintä $\det A = |A|$)

Matriisin A determinantti määritellään rekursiivisesti

$$|A| = \det A := a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\underset{(n-1)\times(n-1)}{|A_{11}|}$$

$$+\, a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\,\underset{(n-1)\times(n-1)}{|A_{12}|}$$

$$+\, a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot|A_{13}|$$

$$+ \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}|A_{1n}|.$$

Tämä on rekursiivinen määritelmä, palautuskaava joka palauttaa $n\times n$ -matriisin determinantin laskemisen $(n-1)\times(n-1)$ -matriisin tapaukseen.

Esim:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinantti

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \overset{(i)}{\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

jossa

$$(i): \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

$$-4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -4\cdot(1\cdot 0 - 7\cdot 4) - 1\cdot(1\cdot(-2) - 0\cdot 4)$$

$$= \;?\qquad \text{j.n.e.}$$

Muistisääntö etumerkkien valinnalle determinantin kehittämiselle: $(-1)^{j+k}$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \\ + & - & + & - & + & & \\ - & & & & & & \\ + & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix}$$

Lause: Determinantti voidaan "kehittää" minkä tahansa vaaka- tai pystyrivin suhteen:

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + a_{i3}c_{i4} + \cdots + a_{in}c_{in}$$

Jossa luvut C_{i1} ovat elementin a_{i1} vastaavat

kofaktorit

$$C_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

jossa A_{ij} oli se matriisi josta i:s vaakarivi ja j:s pystyrivi on poistettu lähtien matriisista A.

Samoin j:n pystyrivin mukaan:

$$\det A = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj}.$$

Perustelu ohitetaan

Esim:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

laskun e. fiksun ihmisen valinta kehitysriviksi!

Laske $\det A$.

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

50

$$\det A = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Kolmiomatriisin determinantti:

<u>Yläkolmiomatriisi</u> on matriisi muotoa

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & \cdots \\ 0 & * & * & * & \\ 0 & 0 & * & * & \\ 0 & 0 & 0 & * & \\ 0 & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

Esim.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

$$\det A = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}_{\text{yläkolmio!}}$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \underbrace{|-2|}_{\substack{-2 \\ \text{det.} \\ \text{ei itseis-} \\ \text{arvo.}}}$$

$$= -56$$

Ts. Yläkolmiomatriisin determinantti on diagonaalielementtien tulo.

<u>Determinantin laskeminen alkeis-rivioperaatioilla</u>

(<u>"gaussikamalla"</u>)

Lause: Olkoon A neliömatriisi

(a) Determinantin arvo ei muutu, jos yhden vaaka- tai pystyrivin monikerta lisätään toiseen vaaka tai pystyriviin (ei vaakariviä pystyriviin!)

(b) Jos kaksi riviä vaihdetaan keskenään, determinantin arvo tulee (-1)-kertaiseksi

(c) Jos jokin rivi kerrotaan vakiolla $r \neq 0$, tulee determinantti r-kertaiseksi.

Perustelu. Aloitetaan c:stä.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \end{vmatrix} \leftarrow \text{kehitetään}$$

$$= (-1)\cdot c a_{21} |A_{21}| + c a_{22} \cdot |A_{22}|$$

$$+ \cdots\cdots (-1)^{2+n} c \cdot a_{2n} \cdot |A_{2n}|$$

$$= c \Big(- a_{21} |A_{21}| + a_{22} |A_{22}| + \cdots + (-1)^{2+n} a_{2n} |A_{2n}| \Big)$$

$$= c \cdot |A| \qquad \blacksquare$$

Perustellaan (b):

vaihdetaan

$$\Bigg(\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow \text{kehit}$$

$$= (-1)^{1+2} a_{11} |A_{11}| + (-1)^{2+2} a_{12} |A_{12}|$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+2} a_{1n} \cdot |A_{1n}|$$

$$= (-1)\left(\cdots \right) = -\det A$$

Matriisin A determinantti kehitettynä 1. vaakarivin suhteen. Siis (b) pätee ∎

Perustellaksemme (a):n tarvitaan välitulos:

Jos determinantissa on kaksi samaa vaaka- tai pystyriviä, ~~se~~ on nolla!

Seuraa siitä että A:n kahden saman vaakarivin vaihto keskenään <u>ei muuta</u> determinantin arvoa; toisaalta <u>muuttaa</u> merkin.

$\Rightarrow \det A = 0$

Lisätään A:n 2. vaakarivi 1. vaakariviin. Saadaan determinantti

kehitä →
$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \cdots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}+a_{21})\cdot(-1)^{1+1}|A_{11}|$$
$$+ (a_{12}+a_{22})\cdot(-1)^{1+2}\cdot|A_{12}|$$
$$+ \cdots + (a_{1n}+a_{2n})\cdot(-1)^{1+n}|A_{1n}|$$
$$= \left(a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + a_{1n}\cdot(-1)^{1+n}|A_{1n}|\right)$$
$$+ \left(a_{21}(-1)^{1+1}|A_{11}| \cdots + a_{2n}(-1)^{1+n}|A_{1n}|\right)$$

11.

Eka tulkulauseke on alkuperäisen matriisin A det. kehitelmyys 1 vaaka-rivin suhteen.

Toka tulkulauseke on

$$\begin{array}{l} \text{samat} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Siis (a) seuraa.

<u>Esim:</u> Kirjassa s. 193

rivien vaihto

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)+ \quad \cdot\tfrac{3}{2}+$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & 6 \end{vmatrix}$$

lopulta päädytään (ilman rivinvaihtoja) determinanttiin

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 3 \cdot (-6) \cdot 1 = 18.$$

(Laskut liian vaikeita.)

<u>Lause:</u> Olkoon A $n{\times}n$-matriisi. Tällöin

$$\det A = \det A^T$$

<u>Perustelu:</u> Matriisin A^T vaakarivit ovat A:n pystyrivejä (ja käänteisesti). Toisaalta det. voidaan laskea m.v. vaaka- tai pystyrivin mukaan. Tästä seuraa väite. ∎

Lause: Jos A ja B ovat $n \times n$ - matriiseja, niin

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

Matkaaste:

$$\det I_{n \times n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

yläkolmio

$$= (1)^n = 1.$$

Jos A on kääntyvä matriisi, niin $\exists \, A^{-1}$ joka toteuttaa

$$A^{-1} A = I$$

Determinantti molemmin puolin:

$$\det A^{-1} \cdot \det A \overset{\text{Lause}}{=} \det A^{-1} A = \det I = 1$$

Päätellään: A on kääntyvä jos ja vain jos $\det A \neq 0$.

välittömänä seurauksena saatiin uusi ekvivalentti

A kääntyvä $\Leftrightarrow$ A^T kääntyvä

viime viikon "kääntyvän matriisin lauseeseen".

$A^{-1} \exists \Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\Leftrightarrow \det A^T \neq 0 \Leftrightarrow (A^T)^{-1} \exists$.

Perustelu lauseelle:

Jos A ei ole kääntyvä $\Rightarrow$ AB ei myöskään ole kääntyvä.

Tolta, koska jos $\operatorname{rank} A < n$ niin $\operatorname{rank} AB < n$ koska

$\operatorname{Range} AB \subseteq \operatorname{Range} A$.

Jos siis $\det A = 0$ $\Rightarrow$ $\det AB = 0$

Vastaavasti analysoi tapahtumaa jos sekä A että B ovat kääntyviä.

Kuten käänteismatriisin laskutekniikkaa perusteltaessa, $\underset{n\times n}{A}$ voidaan viedä gaussittamalla redusoituun porrasmuotoonsa, joka $= \underset{n\times n}{I}$.

Jokainen gaussitusaskel oli itse asiassa A:n kertomista vasemmalta jollain elementaarimatr.

$$\underbrace{E_p' E_{p-1}' \cdots E_1'}_{=: A^{-1}} A = I$$

Elementaarimatriisien inverssit ovat elementaarimatriiseja. (jatkuu seuraavalla luennolla).