Kääntyvän matriisin lause

(Hirmunista; p. 129.)

Lause: Olkoon A $n \times n$-matriisi. Silloin seuraavat ovat ekvivalentteja:

(a) A on kääntyvä

$\Updownarrow$ (b) A on rivi-ekvivalentti $n \times n$-identiteettimatriisin kanssa.

$\Updownarrow$ (c) A:lla on tasan n kpl tukialkion sisältäviä rivejä.

$\Updownarrow$ (d) yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on ainoastaan triviaaliratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. $N(A) = \{0\}$.

$\Updownarrow$ (e) A:n pystyvektorit muodostavat lin. vapaan joukon.

$\Updownarrow$ (f) Lin. kuvaus $\bar{x} \longmapsto A\bar{x}$ on injektiivinen.

$\Updownarrow$ (g) Yhtälöllä $A\bar{x}=\bar{b}$ on vähintään yksi ratkaisu $\bar{x}$ jokaiselle $\bar{b}$.

$\Updownarrow$

(h) A:n pystyvektoreiden lin. virittämä on koko n-dim. pystyvektoreiden avaruus

$\Updownarrow$

(i) Lin. kuvaus $\bar{x} \longmapsto A\bar{x}$ on surjektiivinen.

$\Updownarrow$

(j) $\overset{(a)}{\Leftrightarrow}$ On olemassa $n \times n$-matr. C siten että $CA = I$

$\Updownarrow$

(k) $\overset{(g)}{\Leftrightarrow}$ On olemassa $n \times n$-matr. D siten että $AD = I$

$\Updownarrow$

(l) $\overset{(a)}{\Leftarrow}$ Transpoosi A^T on kääntyvä.

Perustelu:

Ekvivalenssi (a) $\Leftrightarrow$ (l) seuraa ensi viikon determinanttiopista.

Triviaalisti (a) $\Rightarrow$ (j)

(j) $\Rightarrow$ (d). Jos olisi jokin $\bar{x} \neq \bar{0}$ siten että $A\bar{x} = \bar{0}$. Niin tällöin $\bar{0} = C\underbrace{A\bar{x}}_{=\bar{0}} = I\bar{x} = \bar{x}$

(d) $\Rightarrow$ (c). Gaussittamalla; jos olisi epätriviaali ratkaisu $A\bar{x} = \bar{0}$:lle, niin olisi vapaa muuttuja $\Rightarrow$ kaikki n pystyriviä vasemmalla porrasmuodossa ei sisältäisi tukialkiota.

Siis saatiin lisää ekvivalenssej

(a) $\Rightarrow$ (j) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a)

Lähdetään liikkeelle (k):sta

(k) $\Rightarrow$ (g)

Jos $\bar{b}$ on mielivaltainen, niin

$$\bar{b} = \overbrace{A\,D}^{I}\bar{b} = A\bar{x}$$

Jos (k) pätee; jossa $\bar{x} = D\bar{b}$.

(g) $\Rightarrow$ (a): Jos (g) pätee niin porrasmuotoon gaussitetun laajennetun matriisin $\tilde{A} = [A\ \bar{b}]$ yksikään vaakarivi ei voi olla muotoa

$$[0 \;\text{——}\; 0 \,\vdots\, b_j].$$

Siis jokaisella pystyrivillä on tukialkio!

Jakamalla vaakarivit tukialkiolla havaitaan että A on riviekvivalentti I:n kanssa; siis A kääntyvä.

Nyt kaikki on havaittu ekvivalenteiksi.

Kotitehtävä: sivun 129 argumentti Lay:n kirjasta.

Vektoriavaruuksista ja aliavaruuksista

(kertauksen omaisesti).

Vektoriavaruuden laskusäännöt; vektoreiden summa $+$, skalaarilla kertominen

$\bar{x} \longmapsto a\bar{x} \quad a \in \mathbb{C}$.

Määrit: Vektoriavaruuden V **aliavaruus** W on sellainen V:n osajoukko ($W \subset V$) joka toteuttaa

(i) W on suljettu yhteenlaskun alla;

$$\bar{u}, \bar{v} \in W \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in W$$

(ii) W on suljettu skalaarilla kertomisen alla:

$$\alpha \in \mathbb{C}, \bar{u} \in W \Rightarrow \alpha\bar{u} \in W.$$

Tällöin W itse on vektoriavaruus (ts. toteuttaa vektoriavaruuden aksioomat) jos te katsotaan perivän summan ja skalaarilla kertomisen V:ltä.

Esim: Origon kautta kulkevat suorat $y = ax$ ovat kaikki $\mathbb{R}^2$:n aliavaruuksia (jos "kerroinkuntana" on $\mathbb{R}$!)

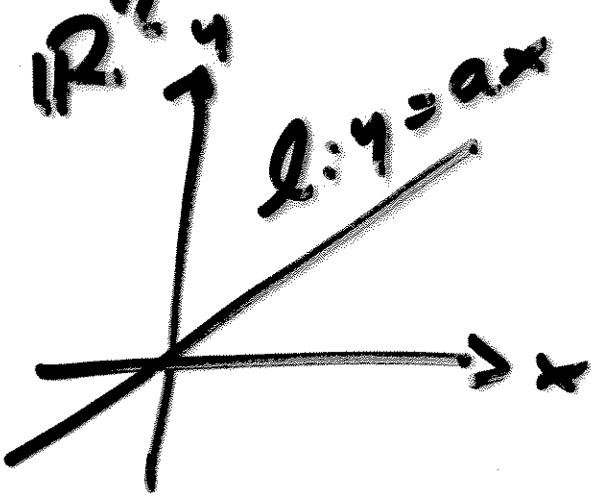
Toistaankin:

jos

$(x,y) \in l$

ts. $ax = y$

niin silloin



$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y) \in l$$

koska $a(\alpha x) = \alpha y$

jos taas $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in l$

$$(x_1+x_2,\ y_1+y_2) \in l$$

koska

$$a(x_1+x_2) = y_1+y_2$$

Tällöin l on aliavaruus vektoriavaruudelle $\mathbb{R}^2$.

Esim: Matriisin nolla-avaruus

$$\underset{m\times n}{N(A)} = \{\bar{x} \in \mathbb{C}^n : A\bar{x} = \bar{0}\}$$

on $\mathbb{C}^n$ aliavaruus.

Esim.: Matriisin $\underset{m \times n}{A}$ pystyvektoreiden $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n$ virittämä avaruus

$$\text{span}\{\bar{a}_1, \dots \bar{a}_n\}$$
$$=: \text{Range}(A)$$

(kirjassa "column space") on $\mathbb{C}^m$:n aliavaruus.

Määr: Vektoriavaruuden V:n kanta on sellainen joukko V:n vektoreita

$$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_p\}$$

jotka

(i) $\text{span}\{\bar{v}_1, \dots \bar{v}_p\} = V$

(ii) $\{\bar{v}_1, \dots \bar{v}_p\}$ on lineaarisesti vapaa.

Lause: Jokaisessa vektoriavaruuden V kannassa on yhtä monta vektoria.

Perustelu ohitetaan.

Määr: Vektoriavaruuden dimensio on sen mielivalt. kannan vektoreiden lukumäärä. Merkitään $\dim V$.

Esim: $\mathbb{C}^n$:n kanta on

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{e}_1, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{e}_2, \quad \dots \quad \begin{bmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{e}_n$$

Siis $\mathbb{C}^n$:n dimensio (yli "kerroinkunnan" $\mathbb{C}$) on n.

Koordinaattijärjestelmät

Vektoriavaruus V, $\dim V = n$, kanta $\{\bar{v}_1, \ldots \bar{v}_n\}$.

Kullakin V:n vektorilla $\bar{x}$ on esitys

$$\bar{x} = x_1 \bar{v}_1 + \ldots \; x_n \bar{v}_n.$$

Lukuja $x_1 \ldots x_n$ kutsutaan $\bar{x}$:n koordinaateiksi kannassa $\{\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n\}$. Kannan avulla voidaan esittää mielivaltainen vektori $\bar{x}$ koordinaattiensa muodostamana pystyvektorina

$$[x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n]^T.$$

Eri kannat vastaavat eri koordinaattijärjestelmiä.

Lause: Vektorin $\bar{x}$ esitys kannassa $\{\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n\}$

$$\bar{x} = x_1 \bar{v}_1 + \dots + x_n \bar{v}_n$$

on yksikäsitteinen.

Perustelu:

Jos olisi kaksi eri tapaa

$$\bar{x} = x_1 \bar{v}_1 + x_2 \bar{v}_2 + \dots + x_n \bar{v}_n$$
$$= y_1 \bar{v}_1 + y_2 \bar{v}_2 + \dots + y_n \bar{v}_n$$

$\Rightarrow$

$$(*) \quad (x_1 - y_1)\bar{v}_1 + (x_2 - y_2)\bar{v}_2 + \dots + (x_n - y_n)\bar{v}_n = \bar{0}$$

Koska $\{\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n\}$ lin. vapaana, tämä yhtälö $(*)$ toteutuu vain jos

$$x_1 - y_1 = 0, \quad x_2 - y_2 = 0, \quad \dots$$

$$x_n - y_n = 0$$

Lause: (Rangilause)

Jos matriisille A on n kpl pystyvektoreita, niin tällöin

$$\dim \operatorname{Range} A + \dim \mathcal{N}(A) = n.$$

Määr.: Lukua $\dim \operatorname{Range} A$ kutsutaan A:n **rangiksi** ja merkitään

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Range} A.$$

Rangilauseen perustelu: Gaussilla A porrasmuotoon syntyy niille pystyriveille (vasemmalta lukien) tukialkioita sisältäviä pystyrivejä ja niitä muita.

Tukialkiot sisältävät pystyrivit antavat meille kannan avaruudelle Range A. Tukialkioita rank A.

Jäljelle jää pystyrivit, jotka määräävät vapaat muuttujat yhtälöryhmälle

$$A\bar{x} = \bar{0}.$$

Tämä vapaiden muuttujien määrä on täsmälleen "vapaiden suuntien" luku avaruudessa $N(A)$.

Luku on $\dim N(A)$.

Yhteensä pystyvektoreita on

$$\operatorname{rank} A + \dim N(A)$$

eli n kpl. ∎

Lisäehtoja kääntyvän matriisin lauseeseen

Lause: Olkoon A $n \times n$-matriisi. Seuraavat ekvivalentteja

(l) A on kääntyvä.

(m) A:n pystyvektorit muodostavat kannan

(n) $\mathrm{Range}\, A = \mathbb{C}^n$

rangilause

(o) $\mathrm{rank}\, A = n$

(p) $\dim \mathcal{N}(A) = 0$

(q) $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.

Perustelu: Rangilause.