Matriisitulo (jatkuu)

$$\underset{m\times n}{A}\ ,\quad \underset{n\times p}{B} = [\bar b_1\ \bar b_2 \cdots b_p]$$

$$C\bar x = A(B\bar x) \quad \forall \bar x$$

Syntyy matriisi $C = AB$, jolle pätee

$$\underbrace{AB}_{m\times p} = [A\bar b_1\ \ A\bar b_2 \cdots A\bar b_p]$$

Matriisitulo on hyvin määritelty vain jos

$$\underset{m\times \underbrace{n \quad n}_{\text{samoja}}\times p}{A \cdot B} \qquad m\times p\text{-matriisi.}$$

Vektorille $\underset{n\times 1}{\bar x}$,

$$\underset{m\times \underbrace{n \quad n}_{\text{sama}}\times 1}{A\ \bar x} = \underset{m\times 1}{\bar b}.$$

Esim:

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \underset{3\times 3}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{AB}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 7 + 3\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot 6 + 3\cdot 11 & * \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 7 + 6\cdot 4 & 4\cdot 2 + 5\cdot 6 + 6\cdot 11 & * \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 27 & 47 & * \\ 63 & 104 & * \end{bmatrix}$$

<u>Matriisitulon laskusäännöt</u>

(i) $$A(BC) = (AB)C$$

Ajattele matriisituloa kuvausten kompositiona:

$$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h.$$

(ii) $$A(B+C) = AB + AB$$

Ajattele että operoidaan vektoriin vektoreihin! $\bar{x}$:

$$A(B+C)\bar{x} = A(B\bar{x} + C\bar{x})$$

$$= A(B\bar{x}) + A(C\bar{x})$$

$$= (AB)\bar{x} + (AC)\bar{x}$$

$$\forall \bar{x} \overset{!}{=} (AB+AC)\bar{x} \,.\quad \blacksquare$$

(iii) $(B+C)A = BA + CA.$

(iv) $r(AB) = (rA)B \qquad r \in \mathbb{C}$

$$= A(rB)$$

"skalaarin siirtosääntö".

<u>Huom</u>: A on aina B:stä vasemmalla!

(v) $IA = A = AI$

$$\underset{n\times n}{I} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Varoituksia</u>:

(i) $AB \neq BA$

$\underset{m\times n}{A} \ \underset{n\times p}{B}$ kertolasku OK

$\underset{n\times p}{B} \ \underset{m\times n}{A}$ kertolasku <u>ei</u> OK jos $p \neq m$.

Vaikka A ja B olisivat molemmat $n \times n$ -matriiseja, niin $AB = BA$ ei ole yleisesti totta.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 10 & * \\ * & * \end{bmatrix} \qquad 10 \neq 14$$

- Silloin kun $AB = BA$ niin sanotaan että A ja B kommutoivat.
- Matriisitulo ei ole kommutatiivinen (paitsi jos puhutaan 1×1 -matriiseista l. kompleksiluvuista).

(ii) Sievennyssääntö ei toimi

$$AB = AC$$

$$\not\Rightarrow \quad B = C.$$

(iii)

$AB = 0$ vaikka

tehä $A \neq 0$ eikä $B \neq 0$.

Tämä ei ole totta edes

siinä erikoistapauksessa

jos $A = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriiseilla on aitoja

<u>nollan tekijöitä</u>.

siis erikuinen kuin nolla.

Matriisin potenssi

Olkoon $n \times n$-matriisi A.

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ kpl.}}, \; k \in \mathbb{N}$$

$$A^0 := I \quad \text{sopimus.}$$

Matriisin transpoosi

$$\underset{m \times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Transpoosi määritellään

$$\underset{n \times m}{A^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{1n} & & & & \end{bmatrix}$$

Matriisin hermitointi

Matriisin $A = [a_{jk}]_{j,k}$ kompleksikonjugaatti on se matriisi jonka elementit ovat A:n kompleksikonjugaatteja:

$$\bar{A} = [\bar{a}_{jk}]_{j,k}$$

Matriisin A adjungoitu matriisi eli hermitoitu "versio" A:sta on

$$A^* := (\bar{A})^T$$

Joissain kirjoissa merkitään

$$A^H := (\bar{A})^T$$

(H sanasta "Hermite"; "hermitointi".)

Transponoinnin laskulait

(i) $$(A^T)^T = A$$

(ii) $$(A+B)^T = A^T + B^T$$

(iii) $$(rA)^T = r \cdot A^T$$

(iv) $$(AB)^T = B^T A^T$$

Tämä on epätriviaali kohta.

Kohtaa (iv) kutsutaan nimellä <u>dressing-undressing principle</u>:

B ~ laitan sukat jalkaan

A ~ laitan kengät jalkaan.

T ~ riisun

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Pukeutumisohje.

Käänteismatriisi

Lineaarinen yhtälöryhmä

(*) $\underset{n\times n}{A}\,\bar{x} = \bar{b}$

Haluaisimme kovasti keksiä toisen matriisin $\underset{n\times n}{C}$ joka toteuttaisi

$$\underset{n\times n}{C}\;\underset{n\times n}{A} = I_n = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}}_{n}\Bigg\}\,n$$

Jos tällainen C olisi, niin yhtälö (*) voitaisiin kertoa molemmin puolin vasemmalta C:llä:

$$\bar{x} = \overbrace{(CA)}^{I}\bar{x} = C(A\bar{x}) = C\bar{b}$$

$$\bar{x} = C\bar{b}$$

<u>Määrit</u> Matriisia $\underset{n\times n}{A}$ kutsutaan <u>kääntyväksi</u> l. <u>ei-singulaari-seksi</u> jos $\exists \underset{n\times n}{C}$ s.e.

$$CA = I \text{ ja } AC = I.$$

(Kaikki A:t eivät ole kääntyviä)

Tällaista matriisia C kutsutaan A:n käänteis-matriisiksi, ja kirjoitetaan

$$C = A^{-1}.$$

Käänteismatriisi on yksikäsitt. määrätty (jo yleisesti sen oleman ollessa). Miksi?

Jos A:lla olisi kaksi käänteismatriisia B ja C:

$$BA = AB = I$$

$$CA = AC = I$$

$$B = BI = B(AC)$$
$$= (BA)C = I \cdot C = C$$
Siis $B = C$. ∎

<u>Lause:</u> Jos A on kääntyvä $n \times n$-matriisi, niin jokaiselle $\bar{b} \in \mathbb{C}^n$ yhtälöryhmälle

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

on yksikäsitt. ratkaisu

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}.$$

<u>Perustelu:</u> Jos $A\bar{x} = \bar{b}$ kerrotaan vasemmalta A^{-1}:llä

$$\bar{x} = I\bar{x} = A^{-1}\underbrace{A\bar{x}}_{\bar{b}} = A^{-1}\bar{b}.$$

Siis $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$ on <u>eräs</u> ratkaisu.
Jos $\bar{u}$ olisi yhtälön olisi saman yhtälön mahd. jokin ratkaisu, niin

ITO

$A\bar{u} = b$, $A\bar{x} = b$. Koska $\bar{b} = \bar{b}$, niin

$$A\bar{u} = A\bar{x}$$

Kerrotaan molemmin puolin A^{-1}:llä.

$$\bar{u} = I\bar{u} = A^{-1}A\bar{u} = A^{-1}A\bar{x} = I\bar{x} = x$$

$$\Downarrow \bar{u} = \bar{x}. \qquad \blacksquare$$

Todella hienoa olisi, jos jostain osaisimme laskea annetulle matriisille A käänteismatriisin.

→ voidaan laskea A^{-1} jos A on kääntyvä

→ valitettavasti A^{-1}:n laskeminen on "kalliimpaa"
20 kuin yhtälöryhmän $A\bar{x} = \bar{b}$ ratkaisu suoraan "gaussittamalla".

→ Jos joudutaan ratkaisemaan hyvin monta kertaa

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

Samalla A mutta vaihtelevalla $\bar{b}$:llä, niin voi kannattaa laskea "muistiin" A^{-1} ja soveltaa sitä suureen joukkoon dataa $\bar{b}$.....

⟹

<u>Lause:</u> $n \times n$ - matriisi A on kääntyvä jos ja vain jos se on riviekvivalentti $n \times n$ - yksikkömatriisin I kanssa:

$$A \sim \dots \sim I$$

Samat alkeisrivioperaatiot (samassa järjestyksessä toistettuina)

Jotka redusoivat A:n I:ksi muuntavat myös I:n A^{-1}:ksi

<u>Perustelu:</u>

Jokainen Gaussin alkeisrivioperaatio vastaa laajennetun matriisin kertomista vasemmalta eräällä "alkeismatriisilla".

Ts. $\underbrace{\text{gaussitusaskeleet}}_{}$ $\leftarrow$ p kpl

$$A \sim E_1 A \sim E_2(E_1 A) \sim \dots \sim I$$

$$E_{p-1}(E_{p-2}(\cdots (E_1 A)))$$

Siis lopuksi olisi

$$\underbrace{E_p \cdot E_{p-1} \cdot E_{p-2} \cdots E_2 E_1}_{=:C} A = I$$

Näin saadaan yksikäsitteisesti:

$$A^{-1} = E_p E_{p-1} \cdots E_2 E_1 .$$

Laskuesimerkki:

Käännä matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu: Laajennetaan A identiteettimatriisilla

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} & A & & & I & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad -4$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\sim \quad \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right].$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -7/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{matrix}}_{= A^{-1}}$$