26.9.2006

Lineaarinen riippumattomuus

Määrit. vektorit

$V := \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_p\} \in \mathbb{C}^n$

ovat lineaarisesti vapaita l. lin. riippumattomia jos vektoriyhtälöllä

$$c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + \dots + c_p \bar{v}_p = \bar{0}$$

on olemassa vain triviaaliratkaisu $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_p = 0$. Vektorijoukkoa V kutsutaan lin. riippuvaksi l. lin. sidotuksi jos se ei ole lin. vapaa.

Huom: V on lin. riippuva jos ja vain jos on olemassa kertoimet $c_1 \dots c_p \in \mathbb{C}$ siten että

(i) kaikki c_k:t, $k = 1, \dots p$ eivät ole nollia

(ii) $$c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + \dots + c_p \bar{v}_p = \bar{0}$$

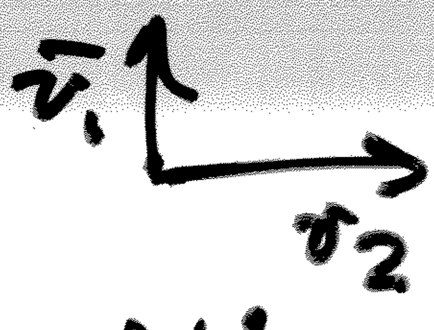
$\mathbb{R}^2$:n tapauksessa:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lin. vapaita:

$$c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$



$$\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$ onko joukko

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ lin. vapaa?

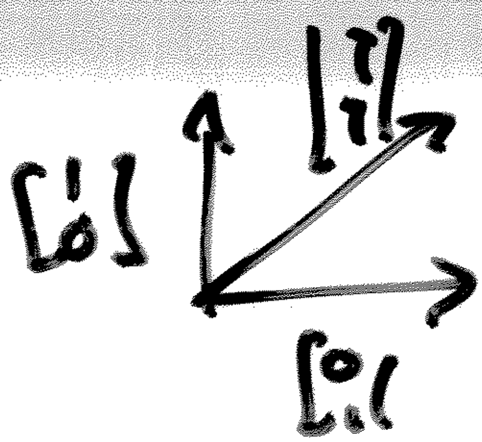
Ei ole.

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = -c_2 , \quad c_2 \in \mathbb{C} \text{ mielv.} \end{cases}$$



Annetta vektorit

$$\bar{V} = \{ \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p \} \in \mathbb{C}^n$$

vektoriyhtälö

$$c_1 \bar{v}_1 + \ldots + c_p \bar{v}_p = \bar{0}$$

on sama asia kuin homog. matriisiyhtälö

$$(*) \qquad A \bar{c} = \bar{0}$$

jossa

$$\underset{n \times p}{A} = [\, \bar{v}_1 \quad \bar{v}_p \,]$$

ja

$$\underset{p \times 1}{\hat{c}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \\ c_p \end{bmatrix}.$$

jos ja vain jos (*) on ei-triviaali ratkaisu, niin vektorit $\bar{V}$ on lin. riippuvia.

Lause: Jos vektorijoukko

$$V = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_p\}$$

on lin. riippuva, niin eräs niistä voidaan esittää lin. kombinaationa muista.

Perustelu: koska V lin. r-va, niin on olemassa vakiot $c_1, \ldots c_p$ joista kaikki eivät nollia, ja että

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \ldots + c_p\bar{v}_p = \bar{0}$$

Tarvittaessa uudelleen numer. voidaan olettaa $c_1 \neq 0$. Tällöin saadaan ratkaistua

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{c_1}\left(-c_2\bar{v}_2 - c_3\bar{v}_3 - \ldots - c_p\bar{v}_p\right)$$

$$= -\frac{c_2}{c_1}\bar{v}_2 - \frac{c_3}{c_1}\bar{v}_3 - \ldots - \frac{c_p}{c_1}\bar{v}_p$$

Näin löydetään algoritmisesti annetusta lin. riippuvasta vektorijoukosta $\bar{V}$ lin. vapaa osajoukko $\bar{V}' \subseteq \bar{V}$ siten että

$$\operatorname{Span} \bar{V}' = \operatorname{Span} \bar{V}.$$

Poistetaan joukosta $\bar{V}$ vektoreista yksi kerrallaan, kunnes päädytään lin. vapaaseen joukkoon.

<u>Määrit</u>: Vektoriavaruuden <u>kanta</u> on sellainen vektorijoukko $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_p$ joka on

(i) lin. riippumaton

(ii) vektoriavaruuden jokainen vektori $\bar{x}$ voidaan (aina) lineaarikombinaat. kanta vektoreista:

$$\bar{x} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_p\bar{v}_p$$

eräille skalaareille $a_1 \dots a_p$.

<u>Esim.</u> $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

on vektoriavaruuden $\mathbb{C}^2$ kanta. Kohta (i) OK. Kohta 2:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 .$$

<u>Lause:</u> Jos vektorijoukossa $V = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_p\} \in \mathbb{C}^n$ on enemmän alkioita kuin avaruudessa dimensioita ($p > n$), niin V lin. riippuva.

Perustelu:

Jos $\underset{n \times p}{A} = [\bar{v}_1 \; \cdots \; \bar{v}_p]$

ja ratkaistaan lin. yht. ryhmää $A\bar{c} = \bar{o}$

niin "gaussittamalla" löytyy aina vapaita muuttujia koska porrasmuodossa on

- n kpl tukialkioita
- p kpl tukialkioiden mahd. paikkoja.

Koska $p > n$, niin välttämättä ainakin yksi vapaa muuttuja $\Rightarrow$ ratkaisu yhtälölle $A\bar{c} = \bar{o}$ ei ole yksikäsitt. ∎

Huom: Jos vektorijoukko V sisältää nollavektorin, se on lin. riippuva.

Perustelu: jos $\bar{v}_1 = \bar{0}$, niin

$$1 \cdot \underbrace{\bar{v}_1}_{=\bar{0}} + 0 \cdot \bar{v}_2 + \cdots + 0\,\bar{v}_p = \bar{0}$$

jossa kaikki kertoimet $1, 0, \ldots, 0$ eivät ole selvästi nollia. ■

Lineaariset kuvaukset

Olkoon V_1 ja V_2 kaksi vektoriavaruutta.

Kuvaus $T : V_1 \to V_2$ on **lineaarinen**, jos jokaiselle $\bar{u}, \bar{v} \in V_1$ ja jokaiselle $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ pätee

(i) $T(\bar{u}+\bar{v}) = T\bar{u} + T\bar{v}$

(ii) $T(c\,\bar{u}) = c\,T\bar{u}$

Ehdot (i) ja (ii) ovat yhdessä ekvivalentteja ehdon

(iii) $T(c_1\bar{u} + c_2\bar{v}) = c_1 T\bar{u} + c_2 T\bar{v}$

kanssa.

Kohtaa (iii) kutsutaan joskus <u>superpositioperiaatteeksi</u>.

<u>Huom</u>: Jokaiselle lin. kuvaukselle T pätee

$$\underbrace{\underset{\in V_1}{T(\bar{0})} = \underset{\in V_2}{\bar{0}}}_{}$$

ei välttämättä samoja nollia.

Perustelu:

$$T(\bar{0}) = T(0\bar{0})$$

$$= 0 \cdot \underbrace{T(\bar{0})}_{\text{vektori}} = \bar{0}$$

Pää ja häntä sanoo $T(\bar{0}) = \bar{0}$. ■

Määr:

- Kuvaus $T : V_1 \to V_2$ **surjektiiviseksi** tai **surjektiiviseksi** jos $\forall \bar{v}_2 \in V_2$ $\exists \bar{v}_1 \in V$ s.e. $T\bar{v}_1 = \bar{v}_2$.
- vektoria $\bar{v}_1$ kutsutaan vektorin $\bar{v}_2$ **alkukuvaksi** kuvauksen T alla.
- Vektori $\bar{v}_2$ on vektorin $\bar{v}_1$ **kuva** kuvauksen T alla.

- Joukkoa

$$\text{Range}\, T := \{ \bar{v}_2 \in V_2 : \exists \bar{v}_1 \text{ s.e. } T\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \}$$

kutsutaan T:n **arvojoukoksi** eli "range"ksi.

Huom: T on surjektio jos ja vain jos $\text{Range}\, T = V_2$.

Määr: Kuvaus $T: \bar{V}_1 \to \bar{V}_2$ on injektio tai injektiivinen jos

$$\forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \bar{V}_1:$$

$$\bar{v}_1 \neq \bar{v}_2 \Rightarrow T\bar{v}_1 \neq T\bar{v}_2.$$

(Ts. kielletään se mahdollisuus että eri vektoreille $\bar{v}_1 \neq \bar{v}_2$ oli samat kuvat: $T\bar{v}_1 = T\bar{v}_2$)

~~Eng~~ Englanniksi injektiivisyys on usein one-to-one.

Huom: Jos merkitään

$$N(T) := \{\bar{v}_1 \in \bar{V} : T\bar{v}_1 = \bar{0}\}$$

eli kuvauksen T nolla-avaruus niin T on injektiivinen jos ja vain jos $N(T) = \{\bar{0}\}$.

Perustelu:

Jos $\bar{v}_1 \neq \bar{v}_2$ niin

$\bar{v}_1 - \bar{v}_2 \neq \bar{0}$.

Ristiriita.

Jos $N(T) = \{\bar{0}\}$,

niin $T(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) = \bar{0}$

välittömästi implikoi

$$\bar{v}_1 - \bar{v}_2 \in N(T) = \{\bar{0}\}$$

eli siis $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \bar{0}$

Sama idea toisinpäin. ∎

Esimerkki lineaarikuvauksesta

esittämisestä

matriisin avulla

Lin. kuvauksesta $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$

tiedetään että

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}5\\-7\\2\end{bmatrix}$$

ja $$T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-3\\8\\0\end{bmatrix}$$

Tästä tiedosta lähtien etsi "matriisikaava" kuvaukselle T.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koska T on lineaarinen,

$$T(\bar{x}) = T\left(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

lin!

$$= x_1 T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

annettu!

$$= x_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=\bar{x}}$$

$$T(\bar{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{=:A} \bar{x}$$

Tässä matriisi A esittää lineaarikuvauksen T kannassa $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

<u>Fakta</u>: Jokainen lin. kuvaus $T: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ voidaan esittää matriisin avulla.

Peruste sille, miksi matriisi-vektori -tulo määriteltiin kuten määriteltiin

<u>Huom</u>: On demassa lin. kuvauksia joita ei voida esittää matriisien avulla.

$f \in C(\mathbb{R})$.

Määritellään

$$(Tf) := f(0)$$

T on lin. kuvaus $C(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$.

(i) $T(f+g) = (f+g)(0)$

$= f(0) + g(0) = Tf + Tg.$

(ii) $T(\alpha f) = (\alpha f)(0)$

$= \alpha \cdot f(0) = \alpha Tf$

Joukko $C(\mathbb{R})$ ei ole "sama" kuin $\mathbb{C}^m$ millään äärellisellä $m \in \mathbb{N}$.

Matriisien laskutoimitukset

$$\underset{m \times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\underset{m \times n}{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

m×n-matriisien joukosta saadaan vektoriavaruus jos summa ja skalaaritulo

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

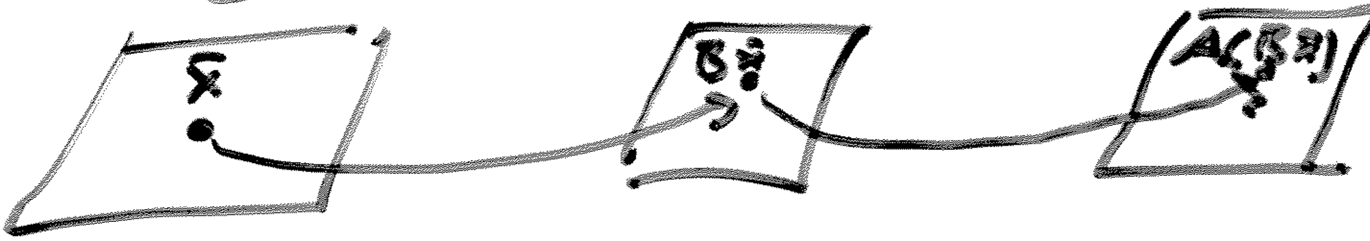
$$\alpha A=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ & & & \\ \alpha a_{m1} & & & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Täysin sama asia (paitsi typografia) kuin jos summattaisiin ja skalaarikerrottaisiin m×n-pystyvektoreita ⟹ on vektoriavaruus.

Vektoriavaruuden ominaisuuksien lisäksi matriiseja voidaan joskus myös kertoa.

Kuvausten yhdistäminen

$$\mathbb{C}^p \xrightarrow{B} \mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^m$$



$$\underset{p \times n}{B} \qquad \underset{n \times m}{A}$$

Kysymys: voidaanko yhdistetty kuvaus

$$\bar{x} \longmapsto A(B\bar{x})$$

lausua yhden matriisin C avulla:

$$A(B\bar{x}) = C\bar{x} \quad \forall \bar{x}$$

<u>Vastaus: kyllä.</u>

Vektori $B\bar{x}$ voidaan esittää

$$B\bar{x} = x_1\bar{b}_1 + x_2\bar{b}_2 + \cdots + x_p\bar{b}_p$$

jos $B = [\bar{b}_1 \ \ \bar{b}_2 \ \cdots \ \bar{b}_p]$

Kerrotaan

$$A(B\bar{x})$$

$$= A(x_1\bar{b}_1 + x_2\bar{b}_2 + \cdots + x_p\bar{b}_p)$$

$$\overset{\text{lineaarinen}}{=} x_1A\bar{b}_1 + x_2A\bar{b}_2 + \cdots + x_pA\bar{b}_p$$

$$= \underbrace{[A\bar{b}_1 \ \ A\bar{b}_2 \ \cdots \ A\bar{b}_p]}_{\substack{\text{tämä matriisi} \\ \text{on esitetty } C \\ \text{jota kutsutaan} \\ \text{matriisien } A \text{ ja } B \\ \text{tuloksi: } C = AB.}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}}_{=\bar{x}}$$