Vektoriyhtälö ja matriisi-vektori tulo

21.9.2006

Määr: vektoreiden $\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n$ viritelmäksi kutsutaan kaikkien näiden vektoreiden lineaarikombinaatioiden joukkoa:

$$\left\{ c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_n\bar{v}_n \;\middle|\; c_1, \dots c_n \in \mathbb{C} \text{ mielivaltaisia} \right\} =: \mathrm{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}.$$

Esim: $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$

Kysymys: Kuuluuko $\bar{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ joukkoon $\mathrm{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$?

Kuuluu span$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$:een jos ja vain jos $\exists\, c_1, c_2$ s.e.:

$$c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 = \bar{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -2c_1 + 5c_2 \\ -5c_1 + 6c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 7 \\ -2c_1 + 5c_2 = 4 \\ -5c_1 + 6c_2 = -3 \end{cases}$$

Voisimme myös lähteä mielivaltaisesta lin. yhtälöryhmästä ja päätyä samankaltaiseen tehtävään joka nyt ratkaistiin.

Määr: Olkoon A $m\times n$-matriisi, jonka pystyvektorit (sarakkeet) ovat $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$:

$$\underset{m\times n}{A} = [\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_n]$$

Olkoon nyt $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ mielív. pystyvektori.

Matriisi-vektoritulo $A\bar{x}$ on seuraava vektori

$$A\bar{x} := x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \dots x_n\bar{a}_n.$$

Laskentatekn:

$$A\bar{x} = [\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \bar{a}_3 \ \dots \ \bar{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + \bar{a}_3x_3 + \dots + \bar{a}_nx_n$$

Huom: Matriisi-vektoritulo on määritelty vain jos

$$\underset{m\times \textcircled{n}}{A} \quad \overset{\text{samat}}{\longleftrightarrow} \quad \underset{\textcircled{n}\times 1}{\bar{x}}$$

$$\underset{m\times n}{A} \qquad \underset{n\times p}{B} \qquad \underset{p\times 1}{\bar{x}}$$

voidaan laskea

$$\underbrace{\underset{m\times n}{A}\,(\underset{n\times 1}{\overbrace{B\bar{x}}})}_{m\times 1\text{-matriisi}}$$

eli m-ulott. pystyvektori.

Esim: jos $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$.

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 8 + 3\cdot 9 \\ 4\cdot 7 + 5\cdot 8 + 6\cdot 9 \end{bmatrix}$$

= on jatka.

<u>Lause</u>: Jos A on $m\times n$-matriisi ja $\bar{b}$ on n-dim. pystyvektori niin <u>matriisi-yhtälölle</u>

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$\left(\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right)$$

on täsmälleen sama ratkaisujoukko kuin vektoriyhtälölle

$$x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots + x_n \bar{a}_n = \bar{b}$$

$(\text{jossa } A = [\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n])$

joka puolestaan on sama ratkaisujoukko kuin lin. yhtälöryhmällä, jonka laajennettu matriisi on

$$[\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n \,\vdots\, b]$$

Perustelu: Ensimm. yhteys on matr.-vekt.-tulon määrit.

Toinen yhteys seuraavasti: jos yhtälöryhmä olisi

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Merkitään

$$\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \qquad \bar{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Tällöin yhtälö (*) on ekvivalentti yhtälön

$$x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots + x_n \bar{a}_n = \bar{b}$$

jossa $\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Eiköhän tämä perustele asian...

<u>Huom</u>: Matriisiyhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on ratkaisu jos ja vain jos vektori $\bar{b}$ kuuluu A:n pystyvektoreiden virittämään.

Matriisi-vektoritulon laskusääntöjä

Olkoon A, $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ sellaisia, että tulot $A\bar{u}$ ja $A\bar{v}$ on määritelty.

Tällöin:

(i) $A(\bar{u}+\bar{v}) = A\bar{u} + A\bar{v}$

(ii) $A(c\bar{u}) = cA\bar{u} \quad \forall c$

Tällaista skalaarikertolaskun ja vektorisumman säilyttävää kuvausta kutsutaan <u>lineaariseksi</u>.

(i) $\wedge$ (ii) $\Rightarrow$ $\forall \alpha\beta \in \mathbb{C}, \forall \bar{u},\bar{v}$

$$A(\alpha\bar{u}+\beta\bar{v})$$

$$= \alpha A\bar{u} + \beta A\bar{v}.$$

Perustelu

$$A = [\bar{a}_1 \ \cdots \ \bar{a}_n]$$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

$$A(\bar{u} + \bar{v}) =$$

$$(u_1 + v_1)\bar{a}_1 + (u_2 + v_2)\bar{a}_2 + \cdots + (u_n + v_n)\bar{a}_n$$

vektori-avar. ax.:

$$= u_1\bar{a}_1 + u_2\bar{a}_2 + \cdots + u_n\bar{a}_n$$

$$+$$

$$v_1\bar{a}_1 + v_2\bar{a}_2 + \cdots + u_n\bar{a}_n$$

$$= A\bar{u} + A\bar{v}.$$

Toinen, ehto (ii) on vieläkin helpompi.

9...

Homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä

Määr.:

Lin. yht. ryhmää $A\bar{x}=\bar{b}$ kutsutaan **homogeeniseksi**, jos $\bar{b}=\bar{0}$.

Lause: Homog. yht. ryhmällä $A\bar{x}=0$ on aina ns. **triviaali** ratkaisu $\bar{x}=\bar{0}$. **Epätriviaali** ratkaisu $\bar{x}\neq\bar{0}$ on olemassa jos ja vain jos "gaussittamalla" saatu porrasmuoto antaa meille vähintään yhden vapaan muuttujan (eli augmentoidun matriisin $[A \,\vdots\, \bar{0}]$ jokin pystyrivi ei sisällä tukialkiota poislukien oikeanpuoleisin $\bar{b}=\bar{0}$ -pystyrivi).

Perustelu: jos ei vapaita muuttujia ole, niin ratkaisu on yksikäsitt. $\Rightarrow$ koska $\bar{x}=\bar{0}$ on aina ratkaisu, toista epätriviaalia ratkaisua $\bar{x}\neq\bar{0}$ ei voi olla. ∎

Epähomogeenisen yhtälöryhmän ratkaisujen parametriesitys

Esim:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & 8 & -4 \end{array}\right]$$

redusoitu porrasmuoto

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Takaisin yhtälöksi

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{3} x_3 = -1 \\ x_2 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

eli ratkaisu yhtälölle

$A\bar{x} = \bar{b}$ on $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 + \frac{4}{3} x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{C}$$

Parametrisoitu muoto ratkaisujen joukolle.

Sama idea toimii aivan yleisemminkin: Yhtälön $A\bar{x}=\bar{b}$ ratkaisut voidaan aina esittää lineaarikombinaationa muotoa

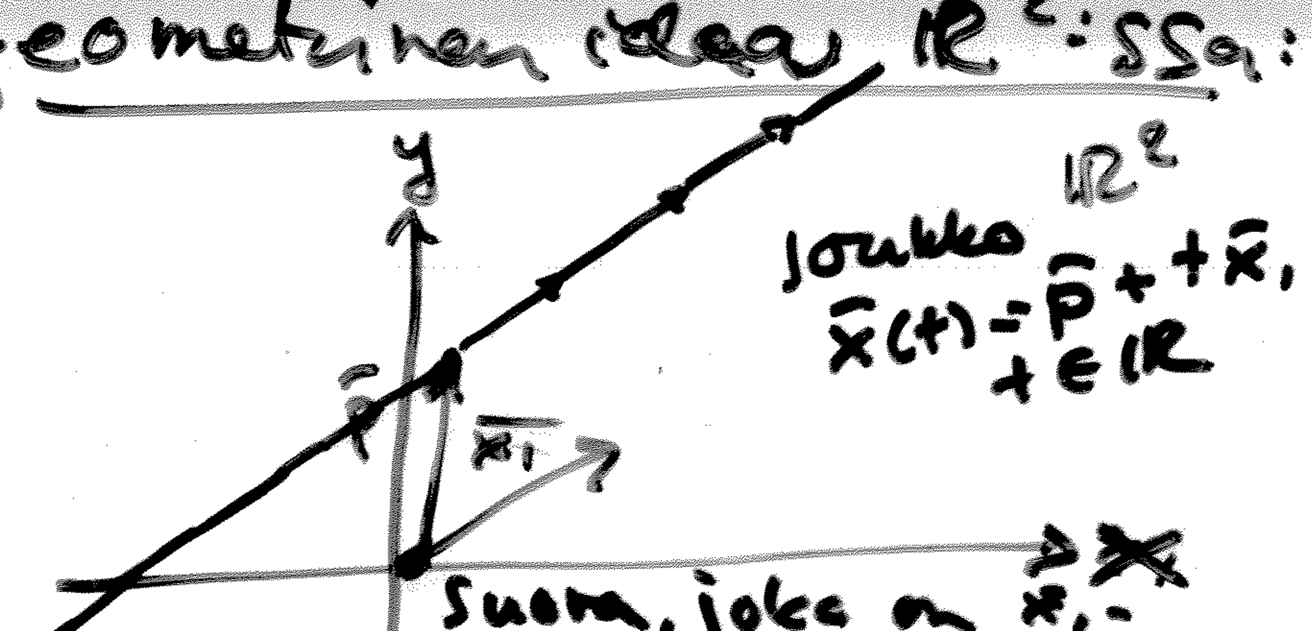
$$\bar{x} = \bar{p} + \bar{x}_1 t_1 + \bar{x}_2 t_2 + \dots \bar{x}_k t_k$$

jossa vektorit $\bar{p}, \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k$ lasketaan kuten esimerkissä, ja jossa k on vapaiden muuttujien lukumäärä;

$$t_1 \dots t_k \in \mathbb{C}$$

ovat vapaita parametrejä.

<u>Geometrinen idea $\mathbb{R}^2$:ssa:</u>



Suora, joka on $\bar{x}_1$-suuntainen, kulkee pisteen $\bar{p}$ kautta

Lause: Oletetaan että yhtälölle $A\bar{x} = \bar{b}$ on eräs (yksittäis-) ratkaisu $\bar{p}$.

Olkoon

$$\mathcal{N}(A) := \{ \bar{x} : A\bar{x} = \bar{0} \}$$

vastaavaavan homogeenisen yhtälön $A\bar{x} = \bar{0}$ kaikkien ratkaisujen joukko.

Tällöin yhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ kaikkien ratkaisujen joukko on

$$\{ \bar{p} + \bar{v}_h : \bar{v}_h \in \mathcal{N}(A) \}$$

Perustelu: Oletetaan että

$$A\bar{p} = \bar{b} \quad \text{ja} \quad A\bar{v}_h = \bar{0}.$$

Tällöin $A(\bar{p} + \bar{v}_h) = \underbrace{A\bar{p}}_{\bar{b}} + \underbrace{A\bar{v}_h}_{=\bar{0}} = b.$

Kääntäen, jos $\bar{y}$ olisi jokin epähomog. yht. $A\bar{y} = \bar{b}$ ratkaisu, niin määritellään

$$\bar{v}_h = \bar{y} - \bar{p}$$

Tällöin

$$A\bar{v}_h = A(\bar{y} - \bar{p})$$

$$= \underbrace{A\bar{y}}_{\bar{b}} - \underbrace{A\bar{p}}_{\bar{b}} = \bar{0}$$

ts. $\bar{v}_h \in \mathcal{N}(A)$.

Ts. <u>jokainen</u> epähomog. yht. ratkaisu $\bar{y}$ voidaan esittää muodossa $\bar{y} = \bar{p} + \bar{v}_h$ jossa $\bar{v}_h \in \mathcal{N}(A)$. ■

<u>Määr:</u> Joukkoa $\mathcal{N}(A)$ kutsutaan matriisin <u>nolla-avaruudeksi</u> t. <u>ytimeksi</u>.

(Engl. Null space, kernel).

Nolla-avaruuden ominaisuuksia

① $\mathcal{N}(A) \neq \{\}$

koska $\bar{0} \in \mathcal{N}(A)$.

② $\mathcal{N}(A)$ on vektori-avaruus.

Tarkoittaa että jos $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{N}(A)$, niin

$$\bar{u}+\bar{v} \in \mathcal{N}(A)$$
$$\alpha\bar{u} \in \mathcal{N}(A).$$

Siis $\alpha\bar{u}+\beta\bar{v} \in \mathcal{N}(A)$.

<u>Perustelu:</u> $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$A(\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}) = A(\alpha\bar{u})+A(\beta\bar{v})$$

$$= \alpha \underbrace{A\bar{u}}_{=\bar{0}} + \beta \underbrace{A\bar{v}}_{=\bar{0}} = \bar{0}$$

Siis $\alpha\bar{u}+\beta\bar{u} \in \mathcal{N}(A)$ mikäli

$\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{N}(A)$