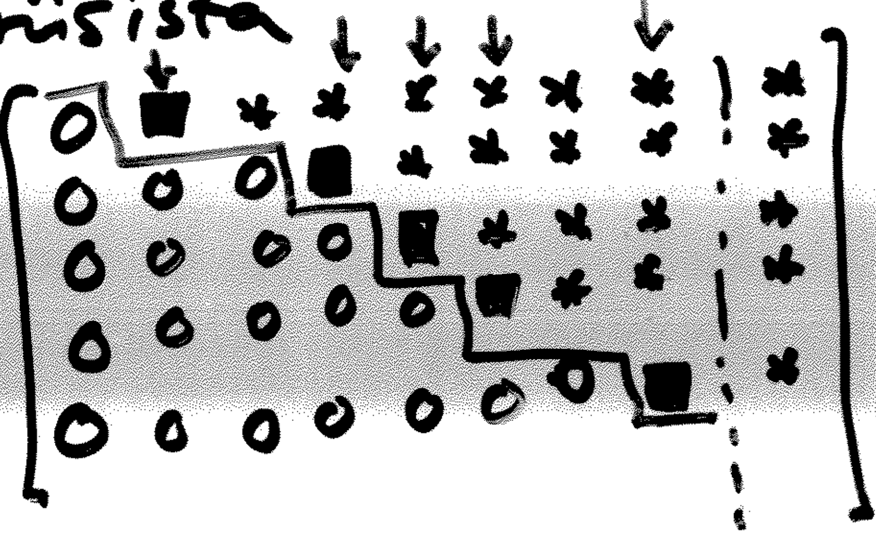
20.9.2006

Porrasmuoto ja redusoitu porrasmuoto

(kertausta.)

Esimerkki porrasmuotoisesta matriisista



■ tukialkio ≠ 0

* "hällä väliä"

(voivat olla nollia, mutta voivat olla olemattakin)

Kahdenlaisia pystyrivejä

1. Sisältävät tukialkion (nk. tukisarakkeita)
2. Niitä jotka eivät sisällä tukialkiota.

Redusoitu porrasmuoto:

$$\left[\begin{array}{ccccccc:c} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right]$$

<u>Määr:</u> Kaksi $m \times n$ matriisia ovat <u>riviekvivalentteja</u> jos ne voidaan muuntaa toisikseen alkeisrivioperaatioille.

Riviekvivalentteja matriiseja A ja B merkitään $A \sim B$

- Jos $A \sim B$ niin $\not\Rightarrow A = B$.
- Jos $A = B$ niin $A \sim B$
- Riviriviekvivalenssi on ns. <u>ekvivalenssirelaatio</u>

1. $A \sim B$ ja $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ <u>transitiivisuus</u>

1. $A \sim A$ refleksiivisyys

2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ symmetrisyys.

Lause: Jokainen matriisi on riviekvivalentti erään yksikäsitt. määrätyn redusoidun porrasmuotoisen matriisin kanssa.

Soveltamisidea:
alkeisrivioperaatiot eivät muuta alla olevan lin. yht. ryhmän ratkaisujoukkoa
siis: redusoidulla porrasmuodolla on oikean samat ratkaisut jos tulkitaan se lin. yht. syst.

Gaussin algoritmin idea!

2.5.

Esim:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right]$$

vaihto, 1 rivi [illegible]

(viisi muuttujaa x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
kolme yhtälöä)

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \left(-\frac{3}{2}\right) +$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-6) \\ (-2) \end{array}$$

Porrasmuoto!

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \cdot \frac{9}{2} +$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} 1:3 \\ 1:2 \end{array}$$

tukirivit

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right]$$

Palataan yhtälöryhmään

- Tukirivejä vastaavat muuttujat x_1, x_2, x_5
- Vapaat muuttujat x_3, x_4 (oikeat numeeriset arvot Lay:n kirja s. 18–19)

Ratkaisu:

$$\begin{cases} x_3, x_4 \in \mathbb{C} \\ x_1 = -24 + 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -7 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

Vapaat muuttujat x_3 ja x_4 <u>parametrisoivat</u> ratkaisujoukon.

Lause:

① Lin. yhtälöryhmä on <u>konsistentti</u> (l. vähintään yksi ratkaisu on olemassa) jos ja vain jos vastaavan laajennetun matriisin ymikään vaakarivi ei ole muotoa

$$[0 \text{———} 0 \mid b]$$

jossa $b \neq 0$.

② Yhtälöryhmän ratkaisu on yksikäsitt. jos ja vain jos jokainen porrasmuotoisen matriisin pystyrivi (paitsi kaikkein oikeanpuoleisin) on tukisarake l. sisältää tukialkion.

Huom 1 Jos olisi vaakarivi muotoa $[0 \text{———} 0 \,\vdots\, b]$, $b \neq 0$ niin se vastaisi yhtälöä

$$0 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots 0 \cdot x_n = b$$

ristiriita jos $b \neq 0$.

Mahdoton yhtälö!

Huom 2.

Jos kaikki sanotut pystyrivit sisältävät tukialkion, niin vapaita muuttujia nolla $\Rightarrow$ ei voida "liikkua" ratkaisujen muodostamassa avaruudessa.

Näiden huomautusten valossa edellinen lause voidaan nähdä perustelluksi.

Vektorit $\mathbb{C}^n$

Pystyvektori on $n \times 1$ matriisi jonka elementit ovat kompleksilukuja

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad u_j \in \mathbb{C}$$

Huomaa että viiva on eri asia kuin konjugaatti

$$z \in \mathbb{C}, \quad z = x + yi$$

$$\bar{z} = x - yi$$

Mitä tarkoittaa

konjugaatti

vektori

konjugaatti viiva

$$\overline{\bar{u}} := \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \\ \bar{u}_n \end{bmatrix}.$$

Tämä on vektorin konjugaattivektori.

Vektorit $\mathbb{C}^n$:ssä voidaan summata:

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$:= \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

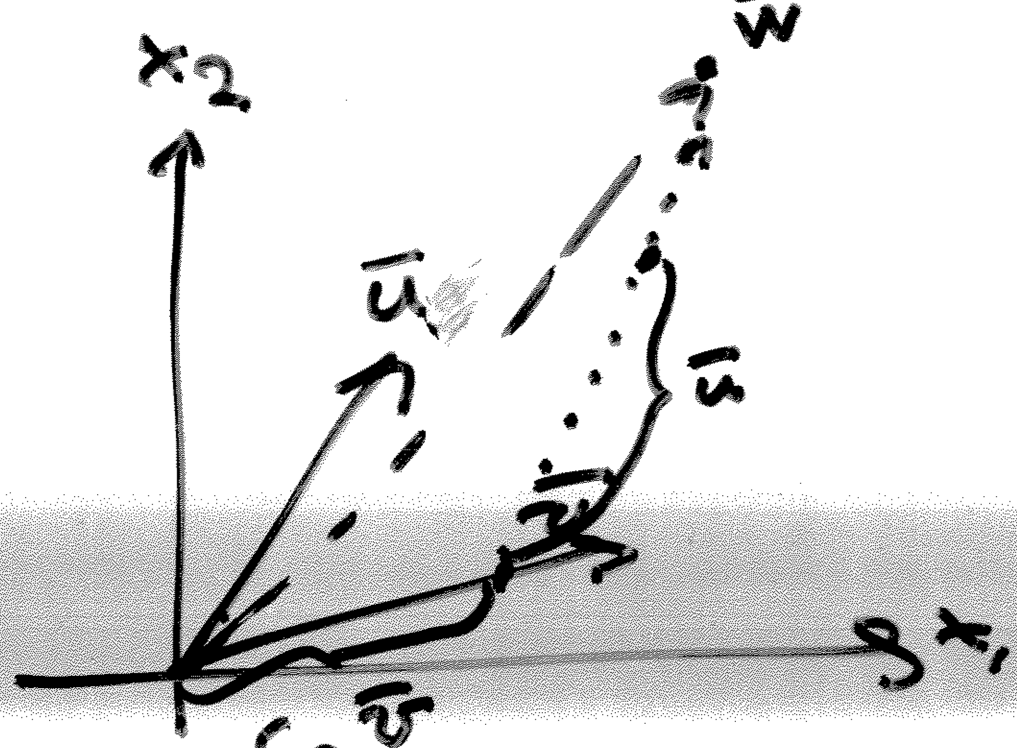
Vektorit voidaan kertoa skalaarilla $c \in \mathbb{C}$:

$$c\,\bar{u} = c \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ \vdots \\ cu_n \end{bmatrix}.$$

Määr: Vektori $\bar{w} \in \mathbb{C}^n$ on lineaarikombinaatio vektoreista $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ jos on olemassa skalaarit c_1 ja c_2 siten että

$$\bar{w} = c_1 \bar{u} + c_2 \bar{v}.$$

$\mathbb{R}^2$:ssa voidaan piirtää lineaarikombinaatiot



$\bar{w} = c_1\bar{u} + c_2\bar{v}$

Ts. tasossa $\mathbb{R}^2$ jokainen vektori voidaan muodostaa lineaarikombinaationa kahdesta annetusta vektorista $\bar{u}, \bar{v}$ jos ja vain jos $\bar{u}, \bar{v}$ eivät ole yhdensuunt. (ts. $\nexists$ vakiota c_3 siten että $\bar{v} = c_3\bar{u}$)

Notaatiota:

$\exists$ tarkoittaa "on olemassa"

$\nexists$ —"— "ei ole olemassa"

$\exists !$ tarkoittaa "on olemassa tasan yksi, yksikäsitt."

$\forall$ tarkoittaa "kaikki"

Esim: (humoristinen!)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_\varepsilon$ s.e.

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Suomeksi: f on jatkuva funktio.

<u>Vektoriavaruuden aksioomat</u>

(i) $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

(ii) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

(iii) $\bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$ (nollavektori)

nollavektori on yksikäsitt.

(iv) $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$

siis jokaisella vektorilla on vastavektori, yksikäsitt.

(v) $c(\bar{u}+\bar{v}) = c\bar{u} + c\bar{v}$

distributiivisyys

(vi) $(c+d)\bar{u} = c\bar{u} + d\bar{u}$

(vii) $c(d\bar{u}) = \underbrace{(cd)}_{\text{skalaari}}\bar{u}$

(viii) $1\bar{u} = \bar{u}$

Tarkastellaan joukkoa

$C([0,1]) := \{$ välillä $[0,1]$ olevien jatkuvien funkt. joukko $\}$.

$$(f+g)(t) := f(t) + g(t) \quad \forall t$$

$$(cf)(t) := cf(t) \quad \forall t$$

Tällä tavalla määritelty summa ja skalaarikert. tekevät $C([0,1])$:sta vektoriavaruuden.