17.9.2020

Lineaariset yhtälöryhmät

Lineaarinen yhtälö

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \cdots + a_nx_n = b$$

muuttuja

kerroin

"oikea puoli"

<u>Lineaarinen yhtälöryhmä</u> on joukko lin. yhtälöitä, joilla on samat muuttujat

Esim:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8 \\ x_1 \qquad - 4x_3 = -7. \end{cases}$$

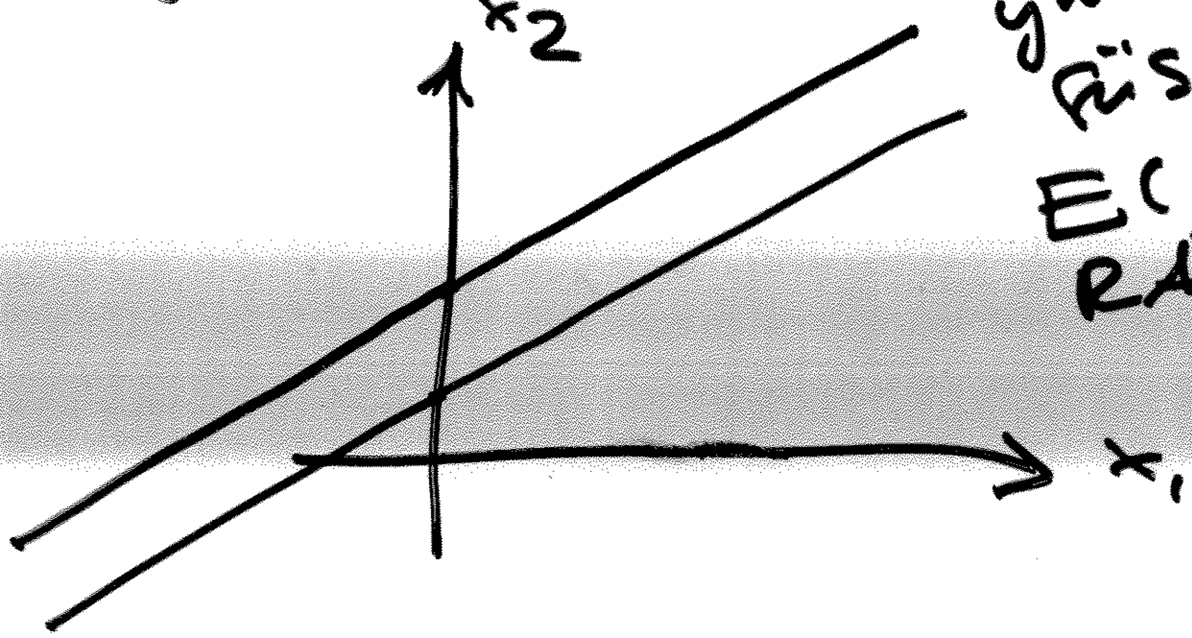
Yhtälöryhmän ratkaisu $(x_1, x_2 \cdots x_n)$ on sellaiset kompleksiluvut $x_1 \cdots x_n \in \mathbb{C}$ joilla toteutuu:

m yhtälöä, n. tuntematonta

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Esim: Suorat $\mathbb{R}^2$:ssa:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$



yhdensuuntaiset siis: EI RATKAISUA

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

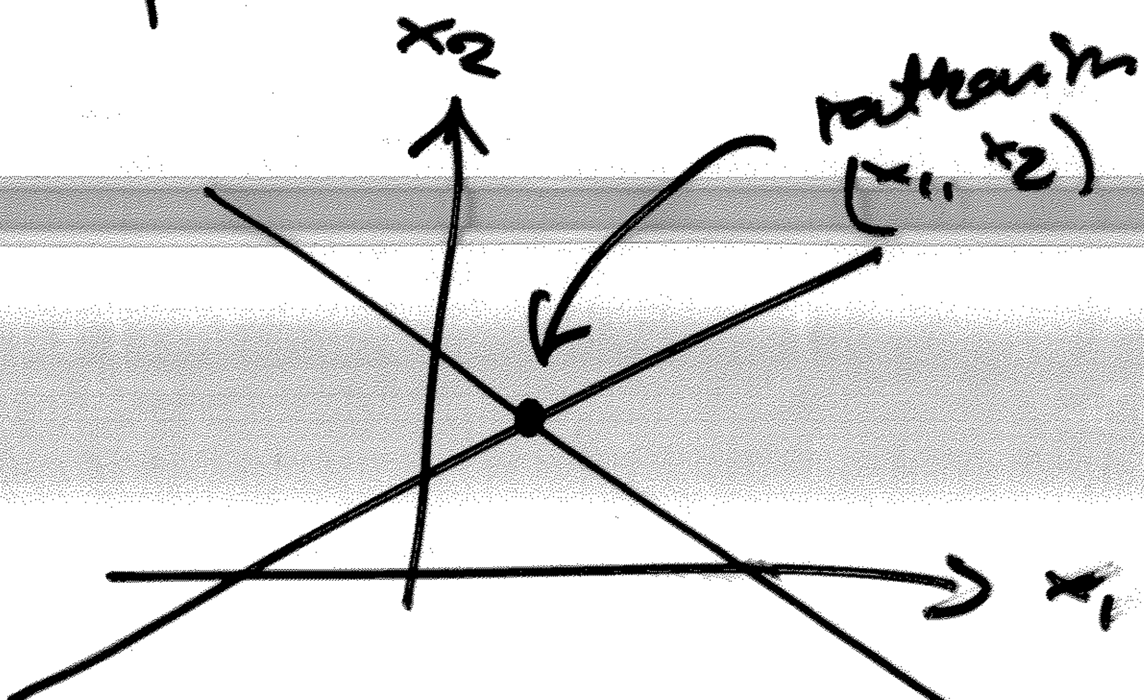
kuvaavat samaa suoraa; ratkaisuja kaikki lukuparit muotoa

$$\left(x_1, \frac{x_1+1}{2}\right),$$ jossa $x_1 \in \mathbb{C}$ mielivaltainen.

Siis: Äärettömän monta ratkaisua

Jos kertoimet $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ oletaan "arpomalla", niin todennäköisyydellä 1 ne esittävät kahta suoraa jotka leikkaavat tasan 1. pisteessä:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$



Yhtälöryhmiä esitetään ns. <u>matriisien</u> avulla:

Yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

vastaa (kerroin)matriisi A

$$A = \left.\begin{bmatrix} \overbrace{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}}^{n \text{ kpl}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\right\} m \text{ kpl}$$

pystyrivejä n kpl
vaakarivejä m kpl,
sanotaan että A on
$m \times n$ – matriisi.

Yhtälöryhmän oikea puoli antaa meille matriisin

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Tämä $m \times 1$ - matriisi l. m-ulotteinen <u>pystyvektori</u>.

Yhtälöryhmään liitetään myös ns. <u>laajennettu matriisi</u>:

$$\underset{m \times (n+1)}{\tilde{A}} = [\underset{m \times n}{A} \;\; b]$$

eli ts.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

Yhtälöryhmän ratkaisu Gaussin eliminaatiolla

Esim:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & \Big| \cdot 4 \\ \quad\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 & + \end{cases}$$

← halutaan pois.

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\ 2x_2 - 8x_3 = 8 & \Big| :2 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\ x_2 - 4x_3 = 4 & \Big| \cdot 3 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 & + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ \quad\quad\quad x_3 = 3 \end{cases}$$

Tiedetään $x_3 = 3$.

2. yhtälö:

$$x_2 = 4 + 4x_3 = 16$$

Tiedetään $x_2 = 16$, $x_3 = 3$.

2. yhtälö

$$x_1 = 2x_2 - x_3 = 29$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $(29, 16, 3)$

joka on yksikäsitt. ja olemassa.

Samat toimenpiteet jotka tehtiin yllä yhtälöryhmille, olisi voitu tehdä myös yhtälöryhmän $\left\{\begin{array}{l}\text{laajennetulle}\\ \text{augmentoidulle}\end{array}\right.$ matriisille

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Edellä tehty ratkaisu koostui kolmenlaisista operaatioista

1. jonkin vaaka rivin korvaaminen rivin itsensä ja jonkin toisen vaakarivin erään monikerran summalle
2. kaksi vaakariviä vaihdetaan keskenään. (Ei käytetty yo. esim.)
3. jonkin yhtälön kertominen nollasta poikkeavalla vakiolla

Näitä "pakkoliikenteitä" kutsutaan <u>alkeisrivioperaatioiksi</u> (elementary row operations).

Gaussin eliminaatio

on alkeisrivioperaatioiden suunnitelmallista käyttöä (kuten edellä esimerkissä.).

Gaussin eliminaatiolla tutkitaan kahdenlaisia kysymyksiä

1. Onko meille annettu lin. yhtälöryhmä <u>konsistentti</u>

i.e. sisältääkö yhtälöryhmä 2 tai useampia yhtälöitä jotka eivät voi yhtäaikaa toteutua

i.e. onko yhtälöryhmällä ratkaisua

2. Silloin kun yht. ryhmä on konsistentti, etsitään kaikki sen ratkaisut.

Esim. konsistenssista

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

Laajennettu matriisi

$$\tilde{A} := \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

riviekvivalentti matriisi

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\left(-\frac{5}{2}\right) \\ \\ + \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \frac{1}{2} \\ + \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

Tulkitaan alkuperäiselle yhtälöryhmälle ekvivalenttina yhtälöryhmänä

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = 8 \\ 0 = \frac{5}{2} \ \lightning \end{cases}$$

mahdoton yhtälö $\rightarrow$ $0 = \frac{5}{2}$

Ristiriita $\Rightarrow$ yht. ryhmä ei konsistentti

Matriisin porrasmuoto

Gaussin alkeisrivioperaatioille pyritään saattamaan laajennettu matriisi $\hat{A}$ ns. porrasmuotoon (echelon form)

Matriisi on porrasmuodossa, jos

1. Jokainen pelkkää nollaa sisältävä vaakarivi on alempana kuin jokainen muu rivi jossa on jotain nollasta poikkeavaa. l. tukialkio

2. Jokaisen vaakarivin ensimmäinen nollasta poikkeava alkio vasemmalta tulee sijaita oikealle vast. alkioita kaikilla ylemmillä riveillä.

3. Tukialkioiden alapuolella saa sijaita pelkkiä nollia.

Porrasmuotoa kutsutaan redusoiduksi jos lisäksi pätee

4. Jokainen tukialkio $= 1$.

5. Jokaisen tukialkion yläpuolella (myös) on pelkkiä nollia.

Esim redusoidussa porrasmuodossa olevat matriisit

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

Redusoitu porrasmuoto antaa yhtälöryhmän ratkaisun suoraan:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_3 = 7 \\ x_5 = 12 \end{cases}$$

x_2, x_4 mielivaltaisia kompleksilukuja