14.9.2006.

Esim: Laskataan luvut $\sqrt[n]{1} = w$

(ts. $w^n = \overset{z}{1}$ ratkaistaan)

$$z = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$w_n := \sqrt[n]{1}\left[\cos\left(\frac{0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right]$$

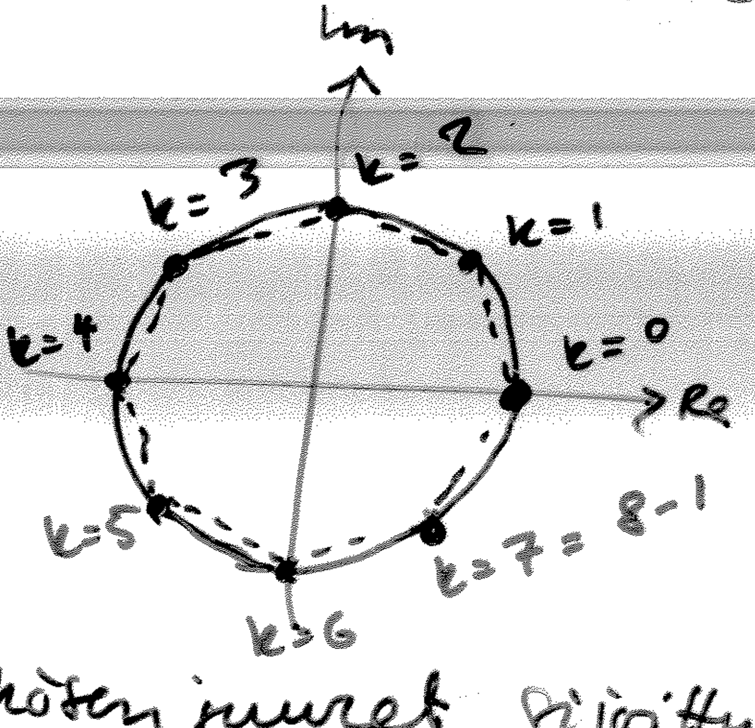
posit. reaalilukuna "tavallinen" n. juuri

jossa $k = 0, \dots, n-1$

$$= \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n},$$

$$k = 0, \dots, n-1$$

Kuvan avulla: kun $n = 8$



n. ykkösen juuret sijoittuvat kompleksitasossa säännöllisen n-kulmion kärkiin, yksikköympyrän reunapuolelle, siten että eräs kärkipiste on kohdassa $z = 1$

Kompleksiluvun eksponentti-funktio

Kuinka laskukone voi laskea edes luvun "sin e" jos ainoa mitä kone voi tehdä, on laskea summia, tuloja, erotuksia, osamääriä?

Laskukone käyttää tähän tarkoitukseen ns. Taylorin sarjoja; olkoon f riittävän "kiltti" funktio $\mathbb{R}$:llä. Kaikki derivaatat $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ ... niin tällöin jokaisella $t \approx t_0$

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{f'''(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \cdots$$

Esim:

$$f(t) = \sin t$$
$$f'(t) = \cos t$$
$$f''(t) = -\sin t$$
$$f'''(t) = -\cos t$$
$$f^{(4)}(t) = \sin t$$
$$f^{(5)}(t) = \cos t$$

Kehityskeskipisteeksi t_0 valitaan $t_0 = 0$ koska siinä sin ja cos ovat tunnettuja:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$$
$$f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1$$
$$f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 1$$

Tällöin funktiolle $f(t) = \sin t$ pätee (jos "kiltteys" olisi annettu)

$$\sin t = 0 + 1(t-0) + \frac{0}{2!}(t-0)^2 + \frac{(-1)}{3!}t^3 + \dots$$

$$= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

Samalla tapaa

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - \cdots$$

ja

$$(*) \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

Käytämme saatua kaavaa (*) sallimalla t kompleksiseksi:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

Laskettava paljonko on

e^{iy} jossa $y \in \mathbb{R}$

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots$$

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\cdot\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} -$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - \cdots\right)$$

$$+ i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \cos y + i \sin y$$

Siis: (Eulerin kaava)

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

jos $z = x + yi$ perustelu oletetaan

$$e^{z} = e^{x+yi} = e^{x}e^{yi}$$

$$= e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

Siis
$$e^{x+yi} = e^{x}(\cos y + i\sin y).$$

Erityisesti

$$e^{i\pi} = \overbrace{\cos\pi}^{-1} + i\overbrace{\sin\pi}^{=0} = -1$$

Tätä kutsutaan myös Eulerin kaavaksi.

Kompleksiluvun eksponenttiesitys

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

niin Eulerin kaavan avulla $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$.

Ts.

$$z = re^{i\varphi}$$

Laskussa, esim. $\begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \end{cases}$

niin tulo on

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$= r_1 r_2 \cdot e^{i\varphi_1 + i\varphi_2}$$

$$= \underbrace{r_2 r_2}\, \cdot\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

jossa $r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2| = |z_1 z|.$

Eksponenttifunktion jaksollisuus

$$e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

jos $\tilde{y} = y + 2\pi k,\quad k \in \mathbb{Z}$,
niin tällöin

$$e^{x+\tilde{y}i} = e^{(x+yi)+2\pi k i}$$

$$= e^x(\cos(y+2\pi k) + i \sin(y+2\pi k))$$

$$= e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+yi}$$

Sama arvo on ts.

$$e^{2\pi k i} = 1 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{\overset{\in\mathbb{C}}{z}+2\pi i \overset{\in\mathbb{Z}}{k}} = e^z \underbrace{e^{2\pi i k}}_{\substack{=1 \\ \text{Euler}}} = e^z.$$

Kompleksiluvun logaritmi

Olkoon $z \in \mathbb{C}$ ja sen polaarimuoto

$$z = re^{i\varphi} \neq 0$$

$$\ln z = \ln(r \cdot e^{i\varphi})$$

Minimivaatimus $\rightarrow$ $$= \ln r + \ln e^{i\varphi}$$

$$= \ln r + i\varphi + 2\pi i k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Tämä valitaan määritelmäksi: Siis $\ln z$:lla on äärettömän monta arvoa (joita k parametrisoi)

Sanity check: $\quad k \in \mathbb{Z}$

$$e^{\ln z} = e^{\ln r + i\varphi + 2\pi i k}$$

$$= \underbrace{e^{\ln r}}_{= r} \cdot e^{i\varphi} \cdot \underbrace{e^{2\pi i k}}_{=1 \text{ kaikilla } k\in\mathbb{Z}.}$$

$$= r \cdot e^{i\varphi}$$

Esim: Etsi kaikki $z \in \mathbb{C}$ joilla

$$e^z = 3+4i$$

pätee; ts. laske

$\ln(3+4i)$.

$z = x + y i$.

$$e^z = e^x e^{yi} = 3+4i$$

$$= \underbrace{\sqrt{3^2+4^2}}_{=5}\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)$$

polaarimuoto

$$= 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

jossa $\tan\varphi = \frac{4}{3}$

ja koska $\frac{3}{5}, \frac{4}{5} > 0$, niin

silloin

$$0 < \varphi = \arctan\frac{4}{3} < \frac{\pi}{2}.$$

Yhtälöistä

$$e^x e^{iy} = 5 \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$
$$= 5 e^{i\varphi}$$

seuraa

$$\begin{cases} e^x = 5 \\ iy = i\varphi + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 5 \\ y = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ts: $z = x + yi$
$$= \ln 5 + (\varphi + 2\pi k) i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

jossa kulma φ toteuttaa $\arctan \varphi = \frac{4}{3}$.

$\blacksquare$

Logaritmin monikäsitt. takia

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{cases} e^{\ln z} = z & \text{(luku!)} \\ \ln e^{z} = z + 2\pi i k, \ k \in \mathbb{Z} & \text{(joukko!)} \end{cases}$$

Yhteen- ja vähennyslaskukaavat

$a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

(totta kun ln ymmärretään moniarvoisena yhtälön molemmin puolin; =-merkki tarkoittaa joukkojen "yhtäsuuruutta")
sama joukko

Samoin

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

Yleinen kompleksiluvun potenssi

Reaalitap: $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

Mitä tarkoittaa

$$x^c \,?$$

x^c on se reaaliluku, jonka logaritmi on

$$c \ln x$$

Samoin kompleksiluvuille:

Jos $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $c \in \mathbb{C}$

niin tällöin

$$z^c := e^{\overbrace{c \ln z}^{\text{äärett. monta arvoa.}}}$$

Jos c olisi rationaaliluku, niin tällöin itse asiassa z^c olisi äärellisen moniarvoinen (esim $c = 1/2$).