"**Liittolukujumppaa**" 13.9.200

(konjugaattiluku)

$$z = x + yi$$

$$\bar{z} := x - yi$$

"konjugaattiviivan katkaisusäännöt"

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

(iii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

[erityisesti $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.]

(iv) $z\bar{z} = |z|^2$

(v) $\overline{(\bar{z})} = z$

Katsotaan väitettä (ii):

$$z_1 = x_1 + y_1 i \qquad z_2 = x_2 + y_2 i$$

$$z_1 z_2$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_2 y_1 + x_1 y_2) i$$

$$\overline{z_1 z_2} = (\text{——}\,,\,\text{——}) - (\text{——}\,,\,\text{——})$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (-x_2 y_1 - x_1$$

$$= \overline{z_1 z_2} \qquad \blacksquare$$

Lause: Olkoon $p(\cdot)$ reaalikertoiminen polynomi:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

jossa $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$,
Tällöin $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$
ja yhtälön $p(z) = 0$ juuret esiintyvät "konjugaattipareittain".
(ts. jos z_0 on juuri, niin myös $\bar{z}_0$ on juuri.)

Perustelu:

$$\overline{p(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}$$

summa

$$= \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \overline{a_2 z^2} + \cdots \overline{a_n z^n}$$

tulo

$$= \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_2} \cdot \overline{z^2} + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{z^n}$$

$$= \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_2} \cdot \overline{z}^2 + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{z}^n$$

a_j:t reaalisia

$$= a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \cdot \overline{z}^2 + \cdots a_n \overline{z}^n$$

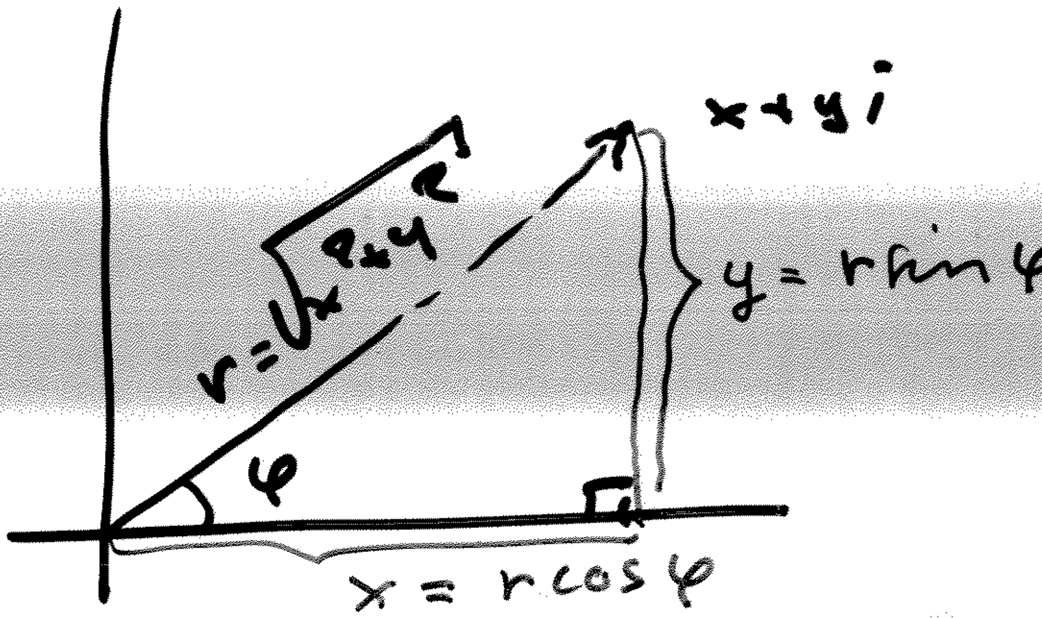
$$= p(\overline{z})$$ josta 1. väite seuraa.

Jos z_0 on yhtälön $p(z) = 0$ juuri (ts. $p(z_0) = 0$) niin edellisen perusteella

$$p(\overline{z_0}) = \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0$$

joten $\overline{z_0}$ on myös juuri. ∎

Kompleksilukujen tulo laskettuna polaarimuodossa



Trigonometria antaa nämä kaavat: jos $x, y \geq 0$ niin tällöin $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$. (ei totta yleensä).

Havainto: $\begin{cases} \sin(\varphi+2\pi) = \sin\varphi \\ \cos(\varphi+2\pi) = \cos\varphi \end{cases}$

joten kulma φ ei ole yksikäsitt. määritelty.

On aina eräs kulma $\varphi = \tilde{\varphi}$ kullekin kompleksiluvulle, joka toteuttaa $-\pi < \tilde{\varphi} \leq \pi$'

Tätä nimenomaista kulmaa $\tilde{\varphi}$ kutsutaan __argumentin pää-arvoksi__:

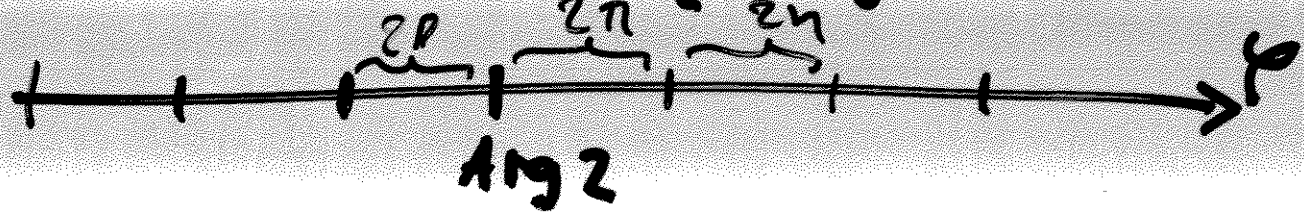
$$\text{jos } z = \cancel{x} + yi$$
$$\text{ja } z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\text{jossa } -\pi < \varphi \leq \pi$$

niin tällöin merkitään

$$\varphi = \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi].$$

Kompleksiluvun z __argumentilla__ tarkoitetaan joukkoa

$$\arg \varphi := \{ \operatorname{Arg} z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \}$$



Sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)$$

$$+ r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) i$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Kompleksiluvulla $\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$ kertominen kiertää luvun $z = x + yi$ vastapäivään kulman φ_2 verran.

$\longrightarrow$ Geometrinen tulkinta tulolle.

mutta:

jos $z_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$

jossa $\varphi_1 \approx \pi$

ja $z_1 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$

jossa $\varphi_2 \approx \pi$

niin tulo

$$z_1 z_2 = \cos(\underbrace{\varphi_1+\varphi_2}_{\approx 2\pi}) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

jossa $\varphi_1+\varphi_2 \approx 2\pi > \pi$.

Totta on, että

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

jossa joukko $\arg z_1 + \arg z_2$ määritellään erikseen.

$$A + B = \{a+b : a\in A \text{ ja } b\in B\}.$$

Sama idea:

$$\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Ar} z_1 z_2 + 2\pi k$$

jossa k on eräs kokonaisluku.

<u>Esim:</u>

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}}\right) + i\sin(-\text{''}-)\right]$$

$$\frac{4\pi + 9\pi}{12} = \frac{13\pi}{12} > \pi$$

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \frac{13\pi}{12} - 2\pi = \pi + \frac{\pi}{12} - 2\pi$$

$$= \pi\left(\frac{1}{12} - 1\right) = -\frac{11\pi}{12}.$$

Kompleksiluvun potenssit

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

niin $$z^n = \overbrace{z \cdots z}^{n\ \text{kpl}}$$

$$= r^n\Big[\cos(\overbrace{\varphi+\varphi+\cdots\ \varphi}^{n\ \text{kpl}})$$

$$+\, i\sin(\varphi+\cdots+\varphi)\Big]$$

$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

siis

$$|z^n| = r^n = |z|^2$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{koska } |\cos n\varphi + i\sin n\varphi|^2 \\ \cos^2 \underbrace{n\varphi}_{\theta} + \sin^2 \underbrace{n\varphi}_{\theta} = 1\end{array}\right)$$

ja kulmalle pätee

$$\arg z^n = n \arg z$$

Esim

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

niin

$$z^2 = z\cdot z = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= (\underbrace{\cos^2\varphi}_{1-\sin^2\varphi} - \sin^2\varphi) + i(\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)$$

$$= (1 - 2\sin^2\varphi) + i\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Toisaalta

$$z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

Koska $z^2 = z^2$, niin sekä reaali $\mathbb{R}$, imag. osat ovat samoja, ja saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} \cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi \\ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

Kaavaa

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

$$= \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

kutsutaan de Moivren kaavaksi.

Kompleksiluvun juuret

Ratkaistaan w yhtälöstä

(*)
$$w^n = z,$$

jossa z annettu kompleksiluku.
(Tästä lähtien kompleksilukujen joukkoa merkitään $\mathbb{C}$:llä)

Yhtälön (*) ratkaisu ei yleensä ole yksikäsitt.; jos $z = 2$, niin $w \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ (tai $w = \pm\sqrt{2}$)

Polaarimuodolla:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

jossa $\quad -\pi < \theta \leq \pi$

$$w = R(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Täytyy olla, jotta (*) toteutuu,

$$R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} R^n = r & \text{(pituudet samat)} \\ n\varphi = \theta + 2\pi k & \text{jossa } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[n]{r} > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta}{n} + 2\pi \cdot \dfrac{k}{n} & \text{jossa } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Nyt riittää katsoa

$$k = \underbrace{0, 1, \ldots, n-1}_{n \text{ kpl}}$$

koska

$$\cos\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \frac{k}{n}\right)$$

$m \cdot n,\ m \in \mathbb{Z}.$

$$= \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi(k-n)}{n}\right)$$

Siis yhtälöllä (*1) on täsmälleen n kpl erisuuria ratkaisuja $\mathbb{C}$:ssä paitsi jos $z=0$ (jolloin $w=0$ on ainoa ratkaisu).

Esim: $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$

$$\cancel{\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\cos 0 + i \sin \theta)}$$

$$2 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}\left[\cos\left(0 + \frac{2\pi k}{2}\right) + i \sin\left(0 + \frac{2\pi k}{2}\right)\right]$$

jossa $k = 0$ ja 1.

$k=0 \Rightarrow \sqrt{2}$

$k=1 \Rightarrow \sqrt{2}(\underbrace{\cos \pi}_{-1} + i \underbrace{\sin \pi}_{=0})$

$= -\sqrt{2}$

Port. Reaaliluvun tapauksessa notaatio $\pm\sqrt{2}$ jatkuvaa.

$$\sqrt[3]{2} = \{z_0, z_1, z_2\}.$$