12.9.2006

Kompleksiluvut

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2x + 1} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = -4$$

$$\left(\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{4}_{\geq 0} = 0 \right)$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{-4}$$

$$= \sqrt{(-1)\cdot 2^2}$$

$$= \sqrt{-1} \cdot \underbrace{\sqrt{2^2}}_{2}$$

ts. $x = 1 \pm 2 \underbrace{\sqrt{-1}}_{=: i}$

$$x = 1 \pm 2i$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$\left(\text{siis} \quad i = \sqrt{-1}\right)$$

Toisentyyppinen lähestymistapa:

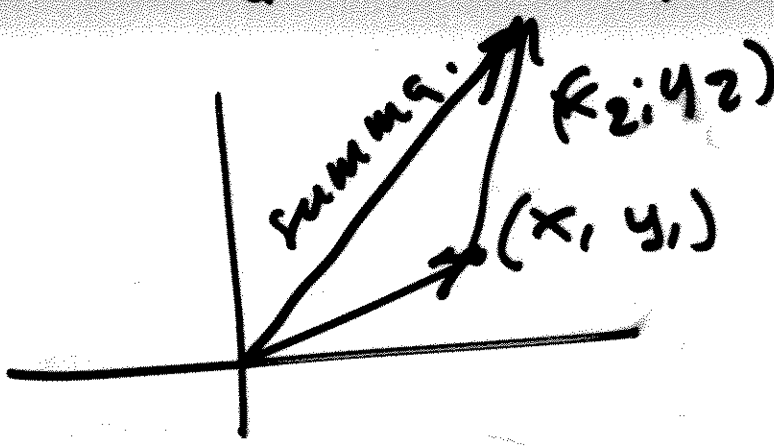
Ajatellaan reaalilukupareja

(x, y), $x, y \in \mathbb{R}$

ja määritellään niille

<u>summa</u>:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$



Tulo:

$$\underbrace{(x_1, y_1)}_{z_1}\underbrace{(x_2, y_2)}_{z_2}$$

$$:= (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$$

Tärkeitä syitä, miksi tämä tapa määritellä lukupareille tulo on mielenkiintoinen.

Notaatiota: $z = (x, y)$

- Tällöin x on z:n **reaaliosa**;

  $x = \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\,(x, y)$

- Ja y on z:n **imaginaariosa**;

  $y = \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\,(x, y)$

- Määritellään

$$i := (0, 1)$$

Huomataan:

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$$

$$= -(1,0) = -1$$

Siis jokainen reaaliluku $x \in \mathbb{R}$ samaistetaan kanonisesti kompleksilukuun $(x,0)$ kanssa

$$= x\underbrace{(1,0)}_{1}.$$

Tästä lähtien tämä vaikea lukupari-notaatio unohdetaan, ja merkitään

$$z = (x,y) \equiv x + yi$$

[illegible]:

$$(2+3i)(4+5i)$$

$$= 2(4+5i) + 3i(4+5i)$$

$$= 8 + 10i + 12i - 15$$

$$= -7 + 22i.$$

Kompleksiluvun $x+yi$ vastaluku on $-x-yi$

Vähennyslasku on vastaluvun lisäämistä:

ts. $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2)$

$$(x_1+y_1 i) - (x_2+y_2 i)$$

$$= x_1 + y_1 i + (-x_2 - y_2 i)$$

$$= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i$$

Jakolasku $\begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 i \\ z_2 = x_2 + y_2 i \end{cases}$

$\frac{z_1}{z_2} =: z$ on se kompl. luku z joka toteuttaa $z z_2 = z_1$.

Esim

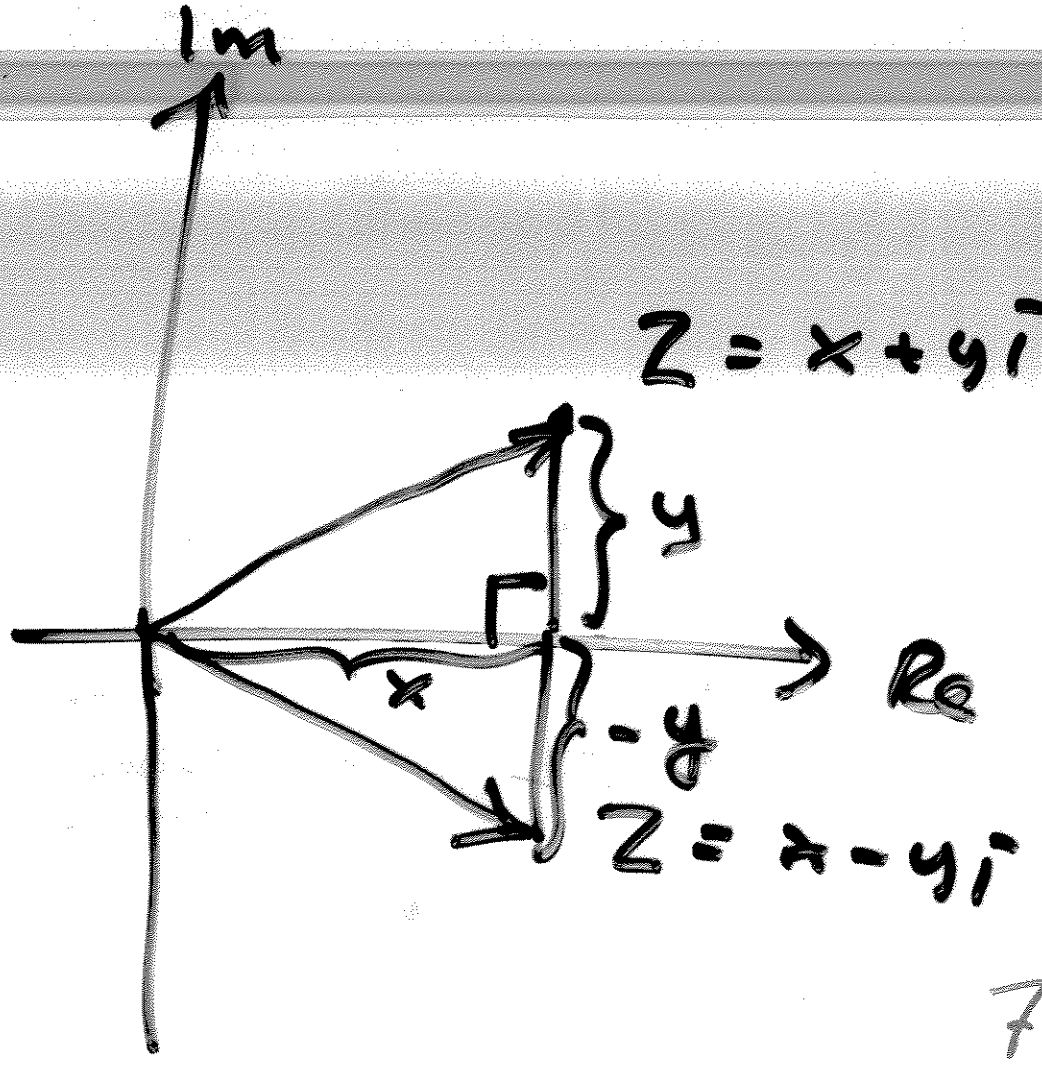
$$z = \frac{1-3i}{1+2i} = a + bi$$

eräille $a, b \in \mathbb{R}$. Mitä ovat a, b?

Liittoluku: $\overline{z} = x - yi$

jos $z = x + yi$.

Graafisesti:



Laavennetaan murtoluku nimittäjän liittoluvulle:

$$\frac{(1-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

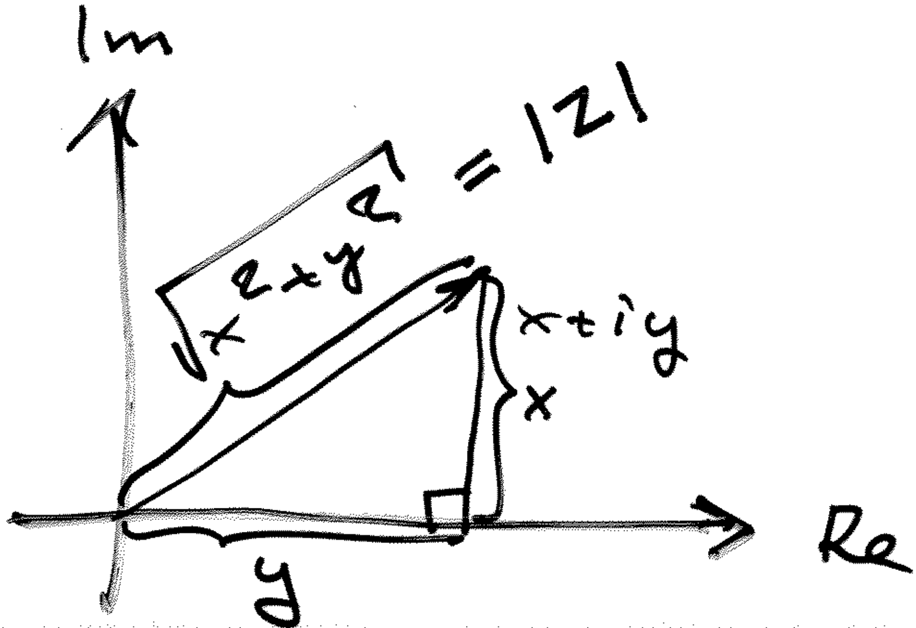
$$= \frac{1-3i-2i-6}{1+2i-2i+4}$$

$$= \frac{-5-5i}{5} = -\frac{5}{5} - \frac{5}{5}i$$

$$= -1-i \quad \text{ts.} \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

__Lause__: Kaikilla $z = x+yi$ pätee:

$$z\bar{z} = |z|^2 := x^2+y^2$$



Kompleksiluvun itseisarvo $|z|$ on sen pituus vektorina:

$$|x+yi|^2 = x^2+y^2$$

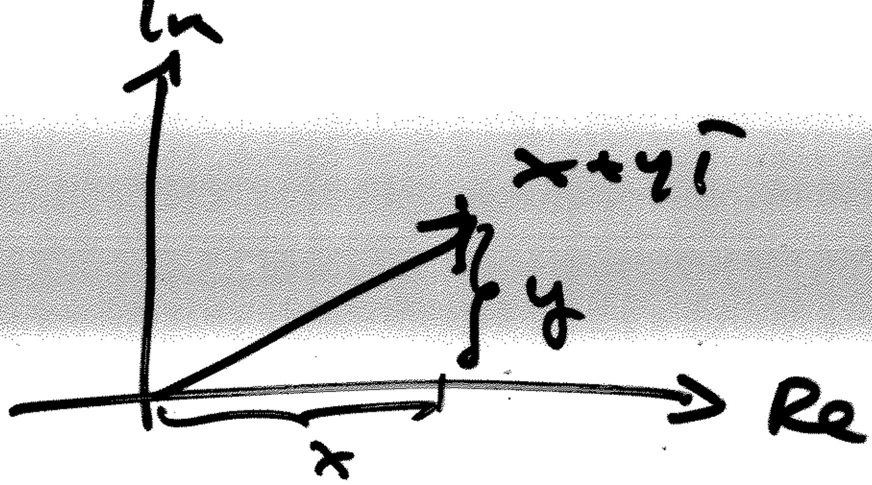
Selvästi

$$(x+yi)(x-yi)$$
$$= x^2 + \underbrace{xyi - xyi}_{} + y^2$$
$$= x^2+y^2$$

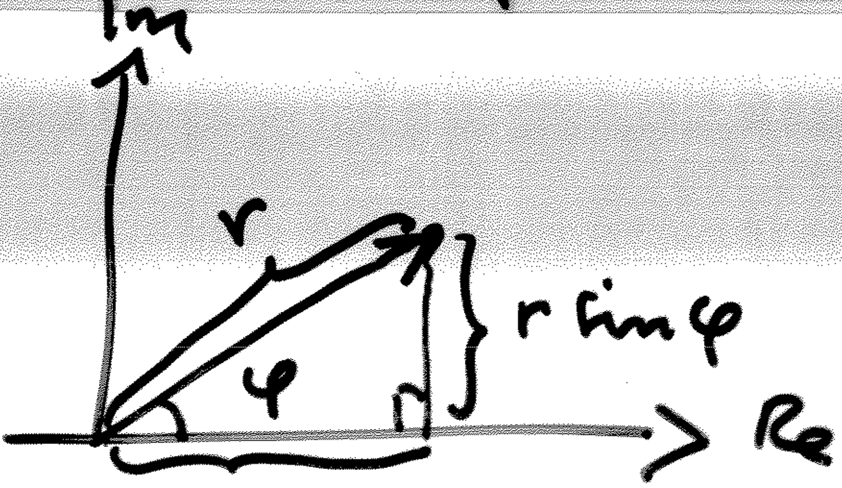
Kompleksiluvun polaarimuoto

Geometrinen tulkinta

- karteesinen koordinaatisto



- polaari- l. napakoordinaatisto



$$x + y i = r\cos\varphi + i\, r\sin\varphi$$
$$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Tiedettiin jo että

$$r = |x + y i|$$

Entä kuinka löydetään $x + y i$ -luvun kulma φ?

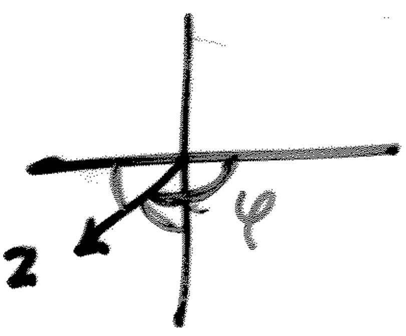
$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \frac{y}{x}$$

Suuri houkutus sanoa että

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

Tämä ei ole aina totta!

Esim: $z = -1 - i$

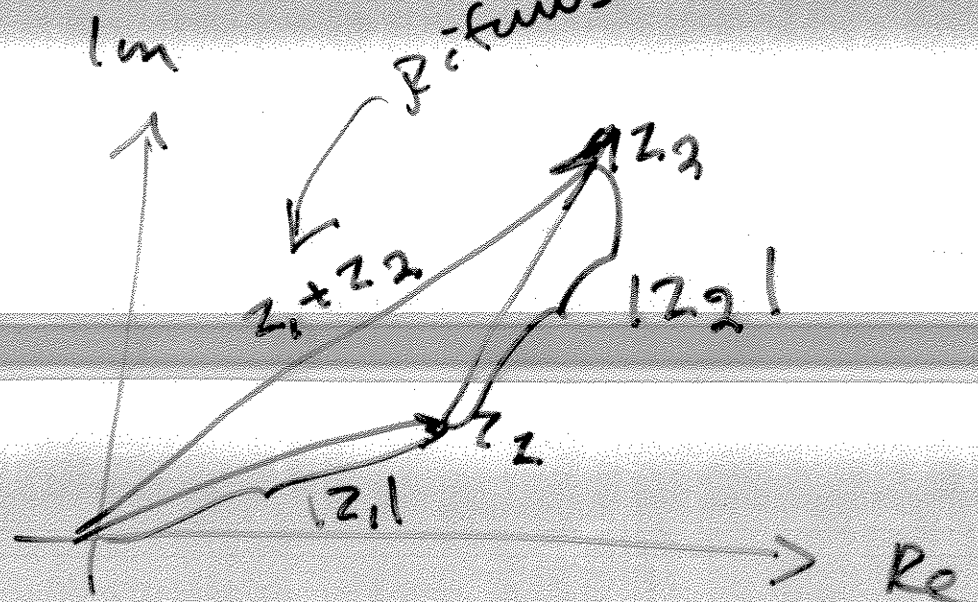


Kolmioepäyhtälö

$$z_1 = x_1 + y_1 i \qquad z_2 = x_2 + y_2 i$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Geometrisesti:



"Mutkan tekeminen pidentää matkaa"