

Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3

3. välikoe, 14. 12. 2004

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

Koulutusohjelmalyhenteet: AUT, BIO, EST, GMA, INF, KEM, KON, KTA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TLT, TIK, TUO

1. Määrittää Gershgorinin ympyrälauseen avulla kompleksitason kiekot, jotka sisältävät matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot. Huom. Ominaisarvoja ei tarvitse laskea.

2. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Määrittää e^{tA} .
(b) Määrittää matriisin A logaritminen normi $\mu(A)$.
(c) Etsi b)- kohdan avulla yläraja matriisinormille $\|e^{tA}\|$.
3. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $x' = Ax$, missä

$$A = \begin{pmatrix} a & -k \\ k & 2 \end{pmatrix}, \quad a, k \in \mathbb{R}.$$

Voiko origo olla

- (a) satula
(b) nielu
(c) lähde
(d) keskus
(e) stabiili fokus
(f) epästabiili fokus

joillakin reaalilukujen k, a valinnalla?

4. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 3y' + 2y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

käyttäen Laplacen muunnosta. Huom. Laplacen muunnoksia löytyy paperin kääntöpuolelta.

Keskeisiä Laplace-muunnoskaavoja: $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$:

$f(t)$	$F(s)$		$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$		$\cos \omega t$	$s/(s^2 + \omega^2)$
t^n	$n!/s^{n+1}$		$\sin \omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
e^{at}	$1/(s - a)$		$\cosh \omega t$	$s/(s^2 - \omega^2)$
t^a	$\Gamma(a + 1)/s^{a+1}$		$\sinh \omega t$	$\omega/(s^2 - \omega^2)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$		$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$