Teknillinen korkeakoulu Peltonen, Nevanlinna / Kemppainen

Mat-1.403 MATEMATIIKAN PERUSKURSSI L3 / syksy 1999

VÄLIKOE 3 / 16.12.1999

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, MAA, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävä 1: RCL–piirin differentiaaliyhtälö olkoon annettu muodossa $x' = Ax + b(t)$ (1)

$$\text{missä} \quad x = \begin{pmatrix} U_C \\ i \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e(t)}{L} \end{pmatrix}$$

ja R, C ja L ovat positiivisia vakioita.

a) Näytä, että origo on homogeenisen yhtälön $x' = Ax$ asymptoottisesti stabiili tasapainopiste.

b) Johda (1):stä samaa piiriä kuvaava differentiaaliyhtälö muotoa $a_2 i'' + a_1 i' + a_0 i = f(t)$.

Tehtävä 2: Tarkastellaan yhtälöä

$$u' = u - \frac{1}{2}u^2.$$

a) Ratkaise vastaava alkuarvotehtävä $u(0) = u_0$ separoimalla muuttujat. Miten ratkaisun luonne riippuu alkuarvosta u_0?

b) Määrää tasapainopisteet ja tarkastele niiden stabiilisuutta.

Tehtävä 3: Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sileä vektorikenttä, ja $a \in \mathbb{R}^n$ sellainen, että $f(a) = 0$. Tiedämme, että kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee $< f(x), x - a > \leq 0$. (2)

a) Todista, että a on differentiaaliyhtälön $x' = f(x)$ stabiili tasapainopiste.

b) Tiedämme lisäksi, että $n = 2k$, $x = (p\ q)^T$ ja f tulee Hamiltonin systeemistä

$$\begin{cases} p' = \frac{\partial}{\partial q} H \\ q' = -\frac{\partial}{\partial p} H \end{cases}$$

missä $H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} q_j^2 + \varphi(p)$, $\quad \varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.
Näytä, että jos $a = 0$, niin (2):sta seuraa, että f on lineaarinen. Anna sille esitys muodossa

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

missä A, B, C, D ovat $k \times k$–matriiseja.

Tehtävä 4: Tarkastellaan eksplisiittisiä 2–askelmenetelmiä

$$\alpha_2 x^{n+2} + \alpha_1 x^{n+1} + \alpha_0 x^n = h\beta_1 f^{n+1} + h\beta_0 f^n.$$

a) Määrää kertoimet siten, että kertaluku on mahdollisimman korkea
(käytä normeerausta $\beta_0 + \beta_1 = 1$).

b) Mikä on tämä korkein mahdollinen kertaluku?

c) Määrittele moniaskelmenetelmän stabiilisuusalue S.

d) Näytä, että a)–kohdan tapauksessa $0 \notin S$.