

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L 3

3. välikoe 15. 12. 1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:

- 1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
- 2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
- 3) koulutusohjelma
(AUT,TFY, TIK,TUO,SÄH,KON,KEM,MAK,PUU,ARK,MAA,MAR,RYK);
- 4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
- 5) nimikirjoitus.

1. Etsi kaksi eri matriisia A ja B siten, että käyrä

$$x(t) = (e^t, 2e^{2t}, 4e^{2t})$$

on sekä difyhtälön $x' = Ax$ että $x' = Bx$ ratkaisu.

2. Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - x_1x_2 - ax_1^2 \\ x'_2 = -x_2 + x_1x_2 - ax_2^2 \end{cases}$$

alueessa $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ ja oletetaan, että $a \geq 0$. Millä a :n arvoilla voit linearisoinnin perusteella päätellä, että systeemillä on asympotoottisesti stabiili tasapainopiste?

3. Muotoile tarkasti Picard–Lindelöfin lause autonomiselle tehtävälle $x' = f(x)$ ja määrittele Picard–Lindelöfin iteraatio. Tarkastellaan sitten tehtävää

$$x' = \frac{1}{2x} \quad x(0) = 1$$

Osoita, että Picard–Lindelöfin lauseen ehdot ovat voimassa ja laske Picard–Lindelöfin iteraatiolla iteraatit x^0 , x^1 ja x^2 .

4. Tarkastellaan menetelmää

$$x^{n+1} - x^n = h (af(t_{n+1}, x^{n+1}) + (1 - a)f(t_n, x^n))$$

missä $0 \leq a \leq 1$. Mikä on menetelmän kertaluku eri a :n arvoilla? Mikä on menetelmän stabiilisuusalue eri a :n arvoilla? Piirrä kuva.