

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3

3. Välikoe 11.12.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää funktiolaskinta eikä muita apuvälineitä. Koeaika on kolme tuntia.

1. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

(a) Laske $e^{t\mathbf{A}}$.

(b) Näytä, että $\|e^{t\mathbf{A}}\| \leq 1$ kaikilla $t > 0$. *Vihje*: laske myös $\mu(\mathbf{A})$.

2. Näytä, että ohjaussysteemi

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

on täydellisesti ohjattava. Etsi säätölaki $u(t) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}(t)$ siten, että takaisinkytketyn systeemin ominaisarvot ovat $\lambda = -1 \pm i$.

3. Etsi systeemin

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x_1 - x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

tasapainopisteet ja luokittele ne. Piirrä myös kuva trajektorien käyttäytymisestä tasapainopisteiden lähellä.

4. Tehtävää $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ratkaistaan implisiittisellä Eulerin menetelmällä. Tiedetään, että \mathbf{f} :llä on tasapainotila \mathbf{p} ja että \mathbf{f} toteuttaa

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Näytä, että menetelmän tuottamalle jonolle $\{\mathbf{x}^k\}$ pätee

$$|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{p}| \leq |\mathbf{x}^k - \mathbf{p}|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vihje: muodosta menetelmäyhtälön sisätulo vektorin $\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{p}$ kanssa.