Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3

3. välikoe 13.12.2001

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi -kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Laskimen käyttö ei ole sallittu.

1. Tarkastellaan mekaanista systeemiä, jossa on massa m, ja jonka tila noudattaa differentiaaliyhtälöä
$$mu'' + cu' + ku = g(u)\,,$$
missä massa m, vaimennuskerroin c ja jousivakio k ovat positiivisia, u kuvaa poikkeamaa tasapainopisteestä ja g on jatkuvasti derivoituva kuvaus siten, että $g(0) = g'(0) = 0$.

   a) Merkitään $\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} u' \\ u \end{bmatrix}$. Määrää 2×2-matriisi $\boldsymbol{A}$ ja funktio $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siten, että
$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{ja} \qquad \boldsymbol{f}(0) = 0,\ D\boldsymbol{f}(0) = 0.$$

   b) Määrittele käsite asymptoottisesti stabiili tasapainopiste.

   c) Näytä, että origo on homogeenisen yhtälön $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ asymptoottisesti stabiili tasapainopiste.

2. Tarkastellaan reaalista differentiaaliyhtälösysteemiä
$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$
josta tiedetään, että spektraaliabskissalle $\alpha(\boldsymbol{A})$ pätee $\alpha(\boldsymbol{A}) < 0$ ja että $\boldsymbol{f}(0) = 0\,,\ D\boldsymbol{f}(0) = 0\,,$ $\boldsymbol{f} \in C^1$. Voidaan osoittaa, että tällöin origo on systeemin asymptoottisesti stabiili tasapainopiste.

   a) Seuraako tästä, että kaikki (1):n ratkaisut ovat rajoitettuja? Vastaa joko kyllä tai ei.

   b) Jos vastasit kyllä, todista väitteesi. Jos vastasit ei, anna esimerkki jossa $\|\boldsymbol{x}(t)\|$ kasvaa rajatta, kun $t \to \infty$.

3. Luennoilla ja harjoituksissa on käytetty kaavaa $\mathcal{L}(e^{t\boldsymbol{A}}) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$, missä $\mathcal{L}$ merkitsee Laplace-muunnosta ja $\boldsymbol{A}$ on kompleksinen $n \times n$-matriisi.

   a) Selitä mille $s \in \mathbb{C}$ kaava on voimassa.

   b) Asetetaan $\mu(\boldsymbol{A}) := \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n} \operatorname{Re} \frac{\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$. Johda estimaatti $\|e^{t\boldsymbol{A}}\| \le e^{t\mu(\boldsymbol{A})}$, $t \ge 0$.

   c) Tiedetään, että $\mu(\boldsymbol{A}) \le 0$. Anna mahdollisimman hyvä estimaatti resolventille $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ joukossa $\sigma = \operatorname{Re} s > 0$.

4. Tarkastellaan eksplisiittisiä 2-askelmenetelmiä
$$\alpha_2 x^{n+2} + \alpha_1 x^{n+1} + \alpha_0 x^n = h\beta_1 f^{n+1} + h\beta_0 f^n.$$

   a) Määrää kertoimet siten, että kertaluku on mahdollisimman korkea (käytä normeerausta $\beta_0 + \beta_1 = 1$).

   b) Mikä on tämä korkein mahdollinen kertaluku?

   c) Määrittele moniaskelmenetelmän stabiilisuusalue S.

   d) Näytä, että a)-kohdan tapauksessa $0 \notin S$.