Teknillinen korkeakoulu Peltonen, Nevanlinna / Kemppainen

Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3

3. välikoe, 14. 12. 2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
1. opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys
2. opiskelijanumero + kirjain, **tekstaten** sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
3. koulutusohjelma (AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH)
4. mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
5. nimikirjoitus.

1.

$$\text{Olkoon} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ kaksi 2 x 2–matriisia.}$$

(a) Määrää funktiot $e^{t(A+B)}$, e^{tA} ja e^{tB}.

(b) Onko tulos

$$e^{t(C+D)} = e^{tC}e^{tD} + \mathcal{O}(t^2) \ \text{ kun } t \to 0$$

totta kaikilla $n \times n$–matriisipareilla C, D? Perustele!

(c) Olkoon vuorotellen $M = A$, $M = B$ ja $M = A + B$. Milloin origo on tehtävän $x' = Mx$ asymptoottisesti stabiili tasapainopiste? Perustele!

2. Olkoon A kompleksinen $n \times n$–matriisi. Merkitään

$$\begin{cases} \alpha(A) := \max\{Re(\lambda) \mid \lambda \text{ on } A\text{:n ominaisarvo}\} \\ \mu(A) := \max\{Re(\lambda) \mid \lambda \in W(A)\}, \end{cases}$$

missä $W(A) := \{< Ax, x > \ | \ \ ||x|| = 1, \ x \in \mathbb{C}^n \}$.

Tässä $< \cdot, \cdot >$ kuvaa sisätuloa $\mathbb{C}^n$:ssä, $||\cdot||$ on sitä vastaava normi ja $n \times n$–matriiseille indusoituvaa matriisinormia merkitään myös $||\cdot||$:llä.

(a) Osoita epäyhtälöt

$$\alpha(A) \leq \mu(A) \leq ||A|| \ .$$

(b) Osoita edelleen:

$$e^{t\alpha(A)} \leq ||e^{tA}|| \leq e^{t\mu(A)} \leq e^{t||A||}, \quad \forall \ t > 0.$$

KÄÄNNÄ!

3. Annettuna on differentiaaliyhtälösysteemi $x' = f(x)$, missä $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on

$$f : \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -|x_1|x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Onko f Lipschitz–jatkuva koko $\mathbb{R}^2$:ssa? Perustele!

(b) Onko $-f$ monotoninen? Perustele!

(c) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x' = f(x), & t > 0 \\ x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & a > 0. \end{cases}$$

(d) Esitä Picard–Lindelöfin iteraatio alkuarvotehtävän ratkaisemiseksi ja muodosta iteraatit x^i kun $i = 0, 1, 2$.

4. Tarkastellaan ns. BD2–menetelmää:

$$\alpha_2 x^{n+2} + \alpha_1 x^{n+1} + \alpha_0 x^n = h f(x^{n+2})$$

missä kertoimet α_i ovat sellaiset, että menetelmän kertaluku on 2.

(a) Määrää kertoimet α_i.

(b) Määrittele yleisen k–askelmenetelmän stabiilisuusalue S.

(c) Tiedetään, että kaikille k–askelmenetelmille pätee

$$\partial S \subset \Gamma \text{ , missä } \Gamma = \left\{ \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} \mid \theta \in [-\pi, \pi] \right\}$$

$$\text{kun} \quad \rho(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \xi^j, \quad \sigma(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \xi^j.$$

Todista tämän avulla, että BD2:lle pätee $\mathbb{C}_- \subset S$ (missä $\mathbb{C}_- := \{z \mid Re\ z \leq 0\}$).