Teknillinen korkeakoulu Peltonen, Tuomela / Bingham

Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3

2. välikoe, 9. 11. 1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
1. opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys
2. opiskelijanumero + kirjain, **tekstaten** sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
3. koulutusohjelma (AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH)
4. mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
5. nimikirjoitus.

1. Olkoon P_n, $n \in \mathbb{N}$ niiden polynomien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko, joiden aste on enintään $n-1$. Onko
$$U = \{f \in P_n |\ f(0) + f'(0) = 0\}$$
P_n:n vektorialiavaruus? Myönteisessä tapauksessa määrää jokin U:n kanta, kielteisessä tapauksessa määrää pienin U:n sisältävä vektorialiavaruus ja sille jokin kanta.

2. Olkoon $n \geq 2$ ja
$$Ax(t) = (\int_0^1 x(s)\mathrm{d}s)(t+1)$$
kun $x \in P_n$ (P_n kuten tehtävässä 1). Onko A lineaarinen kuvaus $P_n \to P_n$? Onko A injektio tai surjektio?

3. Etsi kaikki mahdolliset Jordanin muodot matriiseille, joiden karakteristinen polynomi on $p(x) = (x-2)^7$ ja minimipolynomi on $m(x) = (x-2)^3$ (tällöin löytyy $x_0 \in \mathrm{Ker}(A-2I)^3$ ja $\{x_0,\ (A-2I)x_0,\ (A-2I)^2 x_0\}$ on vapaa jono).

4. Olkoon $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ reaalikertoimisen sisätuloavaruuden V ortonormaali kanta. Olkoon $A : V \to V$ lineaarinen kuvaus siten, että $A(u_1) = u_2 - u_3$, $Au_2 = u_1$, $Au_3 = u_1 + u_2 + u_3$. Määrää $A^*(u_1 + u_2)$. Määrää kuvauksen AA^* ominaisarvot ja ominaisvektorit.

1. Let P_n, $n \in \mathbb{N}$ be the set of polynomials $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, whose degree is at most $n-1$. Is $U = \{f \in P_n |\ f(0) + f'(0) = 0\}$ a subspace of the vector space P_n? If the answer is yes, define a basis for U, otherwise define the smallest subspace containing U and a basis for that.

2. Let $n \geq 2$ and $Ax(t) = (\int_0^1 x(s)\mathrm{d}s)(t+1)$, when $x \in P_n$ (P_n as above). Is A a linear mapping $P_n \to P_n$? Is A injective or surjective?

3. Find all the possible Jordan forms for the matrix, whose characteristic polynomial is $p(x) = (x-2)^7$ and whose minimal polynomial is $m(x) = (x-2)^3$ (there exists $x_0 \in \mathrm{Ker}(A-2I)^3$ and linearily independent sequence $\{x_0,\ (A-2I)x_0,\ (A-2I)^2 x_0\}$).

4. Let $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ be an orthonormal basis for the inner product space V over the reals. Let $A : V \to V$ be a linear mapping so that $A(u_1) = u_2 - u_3$, $Au_2 = u_1$, $Au_3 = u_1 + u_2 + u_3$. Compute $A^*(u_1 + u_2)$. Compute the eigenvalues and eigenvectors of AA^*.